Genauigkeitsmaße richtig interpretieren

Willfried Schwarz, Professur Geodäsie und Photogrammetrie,
Bauhaus-Universität Weimar, Marienstraße 9, 99423 Weimar,
email: willfried.schwarz@bauing.uni-weimar.de

1 Einführung

Das Ergebnis einer Messung besteht aus dem Messwert und einem Genauigkeitsmaß, das die Güte des Messergebnisses charakterisiert. Das Genauigkeitsmaß ist Voraussetzung für die Vergleichbarkeit und Akzeptanz von Messergebnissen als auch für Entscheidungen, die auf der Grundlage von Messergebnissen zu treffen sind. Es gibt nun eine Reihe unterschiedlicher Genauigkeitsmaße, die der Anwender besonders unter dem Aspekt einer interdisziplinären Zusammenarbeit mit anderen Fachgebieten mit ihrem inhaltlichen Aussagegehalt kennen und zuverlässig interpretieren sollte, um sie richtig einzusetzen. In diesem Beitrag sollen einige übliche Genauigkeitsmaße erörtert werden, wobei besonders auf den „Leitfaden zur Angabe der Unsicherheit beim Messen GUM (= Guide to the Expression of Uncertainly in Measurement)“, der seit 1995 in seiner berichtigten Fassung als ISO-Veröffentlichung und seit Juni 1999 als Vornorm DIN 13005 vorliegt /DIN 13005/, eingegangen wird. Die theoretischen Grundlagen und Hintergründe des GUM werden nicht diskutiert, obwohl dazu z. B. in /Schmidt, H. 2003/ Kritik geübt wird.

2 Grundlagen der mathematischen Statistik und Fehlerlehre

2.1 Werte einer skalaren Messgröße

Die **Messgröße** ist die physikalische Größe, deren Wert durch eine Messung bestimmt werden soll (z. B. Länge, Winkel, Temperatur). Der Wert der Messgröße ist der **Messwert** einschließlich seiner Dimension. Wird eine Messgröße L mehrmals gemessen, so bilden die einzelnen Messwerte l_i $(i = 1, 2, ..., n)$ eine

Messreihe vom Umfang *n*. Für weitere Berechnungen wird der **arithmetische Mittelwert**

$$\bar{l} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} l_i \tag{1}$$

eingeführt. Der Mittelwert, wie auch jeder einzelne Messwert, wird in der mathematischen Statistik als eine **Zufallsgröße** aufgefasst. Mit zunehmendem Umfang *n* einer Messreihe wird die Schwankungsbreite des Mittelwertes $\bar{l}$ immer kleiner werden, so dass schließlich gilt /Pelzer 1995/

$$\lim_{n\to\infty}\left\{\bar{l} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} l_i\right\} = \mu_L = E(L). \tag{2}$$

Der Mittelwert $\bar{l}$ konvergiert also gegen den Erwartungswert μ_L der Zufallsgröße *L* (Abb. 1).

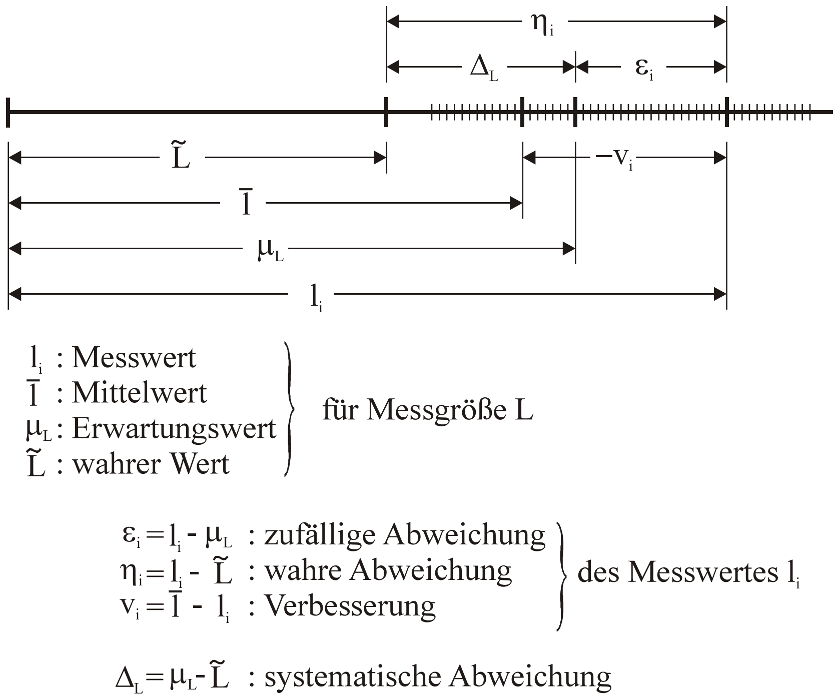

Abb. 1: Werte einer skalaren Messgröße

Der Erwartungswert μ_L der Messgröße *L* wird *nicht* mit dem **wahren Wert** $\tilde{L}$ dieser Größe zusammenfallen, obwohl dies natürlich angestrebt wird. Die Differenz zwischen dem wahren Wert und dem Erwartungswert μ_L ist die **systematische Abweichung** Δ_L /Pelzer 1995/. Ein einzelner Messwert l_i unterscheidet sich vom Erwartungswert μ_L um die zufällige Abweichung ε_i, vom wahren Wert $\tilde{L}$ um die wahre Abweichung η_i. Die Abweichung eines Messwertes l_i vom Mittelwert $\bar{l}$ wird als Verbesserung v_i bezeichnet.

2.2 Ursachen für Messabweichungen

Ein Messwert entsteht im Moment der Messung und ist das Ergebnis aller am Messprozess Beteiligten (Messobjekt, Messgerät, Beobachter, Umwelt, Zeit usw.). Jeder reale Messprozess unterliegt dabei Unzulänglichkeiten und Unvollkommenheiten. Er wird beeinflusst von **zufälligen und systematischen Effekten** sowie von Annahmen und Vereinfachungen bei der Auswertung. Die Abweichungen der Messwerte einer Messreihe untereinander bzw. zum wahren Wert können eingeteilt werden in:

- **grobe Fehler**: Sie betragen ein Mehr- oder Vielfaches der zu erwartenden Messabweichungen (z. B. 20 m – Fehler bei Messbandmessungen, Ablesefehler bei Instrumenten, Zahlendreher beim Protokollieren). Grobe Fehler sind *echte* Fehler und sind nicht Gegenstand der weiteren Betrachtungen; sie sind aufzudecken und zu korrigieren.
- **zufällige Messabweichungen:** Zufällige Messabweichungen sind *keine* Fehler; sie sind ungleichsinnig wirkende, unvermeidbare Abweichungen und treten positiv und negativ mit etwa gleicher Häufigkeit auf. Ursachen sind Unvollkommenheit der Messinstrumente und der menschlichen Sinne sowie die Bedingungen des Messraums. Die Einflüsse zufälliger Messabweichungen lassen sich durch Wiederholungsmessungen und Mittelbildung sowie durch Überbestimmung der Messelemente reduzieren.
- **systematische Messabweichungen:** Systematische Messabweichungen sind gleichsinnig wirkende Einflüsse auf den Messprozess. Eine beispielhafte Aufzählung von systematischen Messabweichungen für messtechnische Belange findet sich in /Schwarz 1995, Seite 46ff/

Der Begriff **Fehler** wird heutzutage nur noch für *grobe Fehler* verwendet. Die frühere Bezeichnung *zufälliger Fehler* wird durch den Begriff *zufällige Messabweichung* ersetzt, da es sich hier nicht um echte Fehler handelt. Das gleiche gilt für *systematische Messabweichungen*.

Es wird versucht, systematische Messabweichungen zu erfassen, um die Messwerte entsprechend zu korrigieren. Trotzdem verbleiben besonders bei Präzisionsmessungen noch **nicht erfasste systematische Messabweichungen** und beeinträchtigen das Messergebnis. Es stellt ein besonderes Problem dar, diese *nicht erfassten systematischen Messabweichungen* richtig abzuschätzen, um sie im Genauigkeitsmaß berücksichtigen zu können (siehe Abschnitt 3.3).

2.3 Varianz und Standardabweichung

Die in einer Messreihe enthaltenen Informationen können in zwei Maßzahlen zusammengefasst werden, nämlich dem Mittelwert $\bar{l}$ und einer Angabe über die Streubreite der einzelnen Messwerte. Das wichtigste **Streuungsmaß** für eine Messgröße L ist die **Varianz** σ_L^2 /Pelzer 1995/:

$$\sigma_L^2 = E\left[\left(L-\mu_L\right)^2\right] = \lim_{n\to\infty}\left[\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}\left(l_i-\mu_L\right)^2\right] = \lim_{n\to\infty}\left(\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}\varepsilon_i^2\right). \tag{3}$$

Hieraus ergeben sich folgende Schlussfolgerungen /Pelzer 1995/:

- In die Bestimmung der Varianz fließen nur die zufälligen Abweichungen ε_i der Messwerte l_i ein. Eine etwaige systematische Abweichung bleibt unberücksichtigt.
- Für die Berechnung der Varianz wird eine Messreihe vom Umfang $n\to\infty$ benötigt, über die man aber in der Praxis nicht verfügt.

Damit kommt der Formel (3) zunächst nur theoretische Bedeutung zu. Für praktische Zwecke geht man zu einem Schätzwert für σ_L^2 über, nämlich zu der **empirischen Varianz** s_L^2. Für den in der Regel in der Praxis anzutreffenden Fall eines unbekannten Erwartungswertes μ_L muss auf den Mittelwert $\bar{l}$ zurückgegriffen werden /Pelzer 1995/. Die Formel für die empirische Varianz lautet dann:

$$s_L^2 = \frac{1}{n-1}\sum_{i=1}^{n}\left(\bar{l}-l_i\right)^2 = \frac{1}{n-1}\sum_{i=1}^{n}v_i^2 \quad . \tag{4}$$

Der Divisor *n-1* in (4) ist die Anzahl der linear unabhängigen Summanden (Verbesserungen v_i); diese wird auch Anzahl *f* der **Freiheitsgrade** oder **Redundanz** genannt.

Obwohl von der Theorie her gesehen die Varianz als Streuungsmaß im Vordergrund steht, ist sie für die praktische Verwendung weniger geeignet, weil sie von anderer Dimension ist als die Messgröße selbst. Deshalb wird für praktische Zwecke auf die **Standardabweichung** übergegangen:

$\sigma_L =_+ \sqrt{\sigma_L^2}$ **Standardabweichung** von *L*, (5)

$s_L =_+ \sqrt{s_L^2}$ **empirische Standardabweichung** von *L*. (6)

Bei σ_L und s_L handelt es sich um die Standardabweichung eines **einzelnen Messwertes** l_i. Für die Standardabweichung des **arithmetischen Mittelwertes** gilt

$$\sigma_{\bar{l}} = \frac{\sigma_L}{\sqrt{n}} \quad \text{bzw.} \quad s_{\bar{l}} = \frac{s_L}{\sqrt{n}} \quad . \tag{7}$$

Die Standardabweichung des Mittels einer Messreihe geht mit wachsendem Umfang *n* der Messreihe zurück.

2.4 Wahrscheinlichkeitsverteilungen

Die Verteilungsfunktion

$$F(x) = \int_{-\infty}^{x} f(x) \cdot dx \tag{8}$$

beschreibt, mit welchen Häufigkeiten bzw. Wahrscheinlichkeiten die Messwerte in Abhängigkeit von ihrem Wert zu erwarten sind oder zu einem gegebenen Wertebereich gehören. Die Wahrscheinlichkeit für den Gesamtbereich der Werte der Zufallsgröße hat den Wert Eins. Die erste Ableitung der Verteilungsfunktion – also der Integrand *f(x)* – heißt die **Wahrscheinlichkeitsdichte** oder kurz die **Dichte** der betreffenden Verteilung. Die Fläche unterhalb der Dichtefunktion ist auch immer Eins. Aus den Verteilungs- bzw. Dichtefunktionen lassen sich der Erwartungswert /Kreyszig 1973, Seite 85ff/

$$\mu = \int_{-\infty}^{+\infty} x \cdot f(x) \cdot dx \tag{9}$$

und die ihm zugeordnete Varianz

$$\sigma^2 = \int_{-\infty}^{+\infty} (x-\mu)^2 \cdot f(x) \cdot dx \tag{10}$$

ableiten.

Es gibt nun unterschiedliche Verteilungsfunktionen. Einige typische Verteilungen, die in der Messtechnik eine Bedeutung haben, sind:

2.4.1 Normalverteilung

Die Gauss-Verteilung oder Normalverteilung wurde von C. F. Gauss (1777-1855) im Zusammenhang mit der Theorie der Messfehler eingeführt. Viele Zufallsvariable, die bei Experimenten und Beobachtungen in der Praxis auftreten, sind normalverteilt. Die Wahrscheinlichkeitsdichte der Normalverteilung ist gegeben durch (Abb. 2)

$$f(x) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} \cdot e^{-\frac{1}{2}\left(\frac{x-\mu}{\sigma}\right)^2} \quad . \tag{11}$$

Mit
σ = Standardabweichung und
μ = Mittelwert

Die Parameter der Normalverteilung sind der Mittelwert μ und die Standardabweichung σ.

Die Kurve *f(x)*, die so genannte **Glockenkurve**, ist symmetrisch bezüglich μ. Die Wendepunkte der Funktion liegen bei $\pm\sigma$.

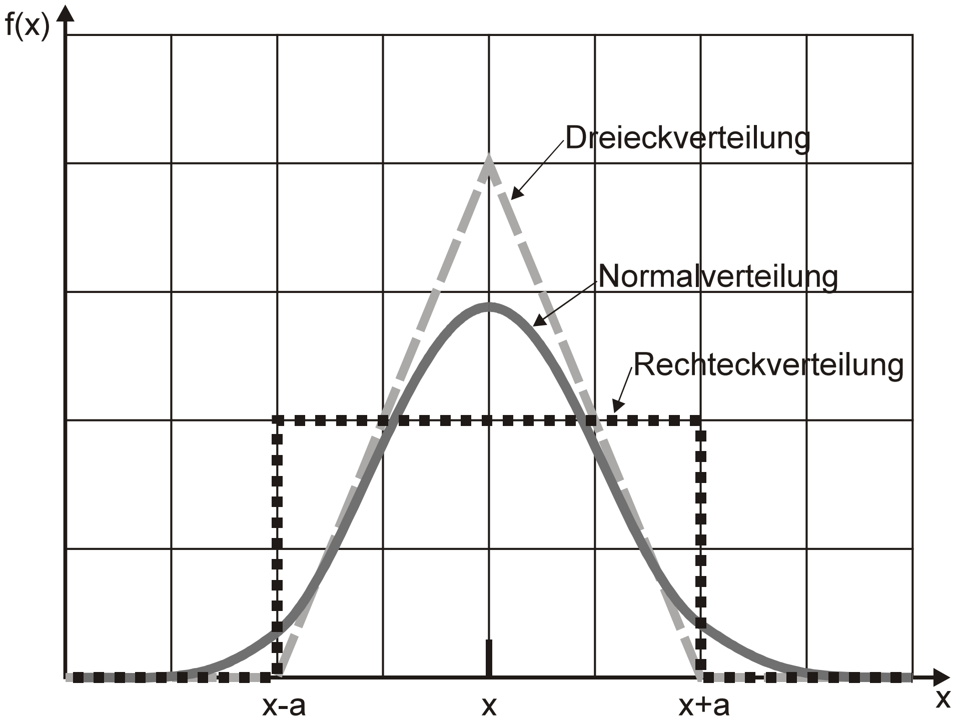

Abb. 2: Dichtefunktion verschiedener Verteilungen

2.4.2 t-Verteilung (Student-Verteilung)

Im Gegensatz zur Normalverteilung, bei der unendlich viele Messwerte vorausgesetzt werden, berücksichtigt die t-Verteilung (Student-Verteilung) den Umfang n einer Messreihe und ist deshalb bei kleinem n besser geeignet als die Normalverteilung; bei geringer Anzahl n fallen die Flanken der Dichtekurve weniger steil ab, als bei der Normalverteilung. Mit wachsendem n strebt die Verteilungsfunktion der t-Verteilung gegen die Verteilungsfunktion der Normalverteilung /Kreyszig 1973/. Die t-Verteilung wird hauptsächlich zur Beurteilung von Stichproben (z. B. von Mittelwerten) verwendet.

2.4.3 Rechteck-Verteilung

Bei der Rechteck-Verteilung (Abb. 2) sind alle Messwerte gleich wahrscheinlich. Beträgt der Abstand zur Grenze a, dann lässt sich die Standardabweichung σ über Formel (10) berechnen durch $\sigma = a/\sqrt{3}$ /Schmidt, M. 2003/.

Beispiele zu einer rechteckförmigen Wahrscheinlichkeitsverteilung sind vorgegebene Toleranzen, Fehlergrenzen oder die digitale Auflösung.

2.4.4 Dreieck-Verteilung

Nimmt die Wahrscheinlichkeit linear mit dem Abstand ab, ergibt sich die Dreieck-Verteilung (Abb. 2). Beträgt der Abstand zur Grenze a, dann lässt sich die Standardunsicherheit σ berechnen durch $\sigma = a/\sqrt{6}$ /Schmidt, M. 2003/. Die Dreieck-Verteilung wird auch als Simpson-Verteilung bezeichnet /Hartung 1984/.

2.5 Vertrauens- oder Konfidenzintervalle

Der Erwartungswert μ_L der Messwerte einer Messreihe bleibt zwar in der Regel unbekannt, doch läßt sich ein Konfidenzintervall angeben, das diesen Wert mit der gewählten Wahrscheinlichkeit überdeckt. Für eine normalverteilte Zufallsgröße X gilt /Pelzer 1995/:

$$\begin{aligned} \frac{x-\mu_x}{\sigma_x} &= \frac{\varepsilon_x}{\sigma_x} \sim N(0,1) \ , \\ \frac{x-\mu_x}{s_x} &= \frac{\varepsilon_x}{s_x} \sim t_f \ . \end{aligned} \tag{12}$$

Darin bedeuten N(0,1) die Standard-Normalverteilung und t_f die Student-Verteilung mit f Freiheitsgraden, wie sie nach Formel (4) und (7) bei der Berechnung von s_x eingeführt worden sind. Für den Fall, dass nur s_x bekannt ist, berechnen sich die Grenzen des Konfidenzintervalls nach

$$\begin{aligned} &C_{\mu,u} = x - s_x \cdot t_{f,1-\alpha/2} \ , \\ &C_{\mu,o} = x + s_x \cdot t_{f,1-\alpha/2} \ , \\ &t_{f,1-\alpha/2} \ : \ \text{Quantil der t-Verteilung mit f Freiheitsgraden .} \end{aligned} \tag{13}$$

Die Breite des Konfidenzintervalls hängt sehr wesentlich von der Anzahl f der Freiheitsgrade bei der Bestimmung der empirischen Standardabweichung s_x ab. Werte der t-Verteilung können entsprechenden Tabellen entnommen werden.

2.6 Auflösung, Genauigkeit, Präzision und Richtigkeit

Die Begriffe Genauigkeit, Richtigkeit und Präzision sind in der DIN 55350 Teil 13 definiert. Diese Begriffe lassen sich exemplarisch an einer Zielscheibe verdeutlichen. Unter der **Auflösung** wird die kleinste Zähleinheit, hier der Abstand der Ringe der Zielscheibe, verstanden. Die Streuung der Einschusslöcher gibt die **Präzision** an; sie ist ein Maß für die Reproduzierbarkeit der Treffer unter den gegebenen Bedingungen (zufällige Streuung). Systematische Einflüsse werden in diesem Genauigkeitsmaß nicht berücksichtigt. Die Streuung der Einschusslöcher zum Zentrum der Zielscheibe wird durch die **Genauigkeit** ausgedrückt. Hierbei werden also etwaige systematische Abweichungen berücksichtigt.

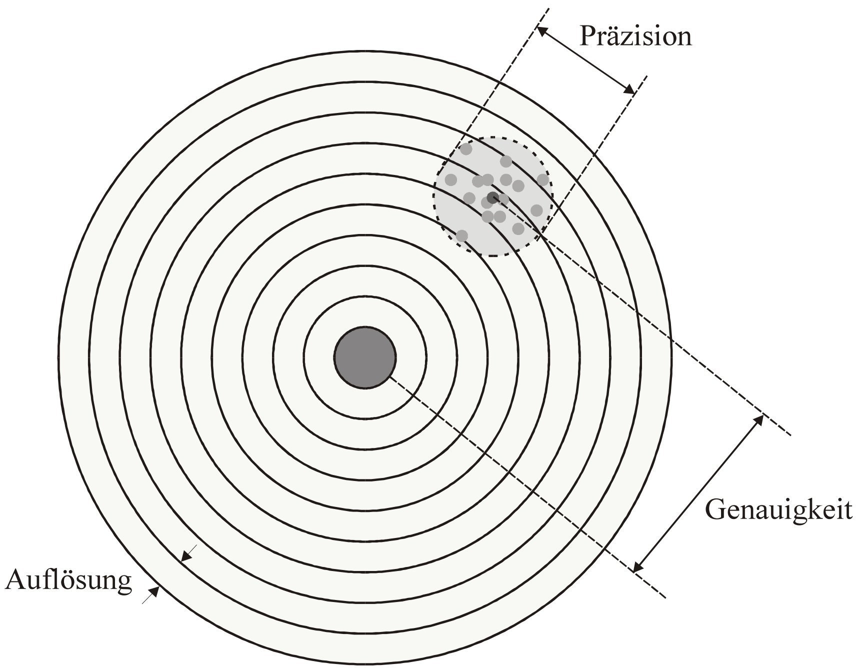

Abb. 3: Verdeutlichung der Begriffe Genauigkeit, Präzision und Auflösung an einer Zielscheibe

Der Überbegriff **Genauigkeit** bzw. **Messgenauigkeit** bezeichnet daher die Nähe der Übereinstimmung eines Messergebnisses zum **wahren Wert**. Da dieser Wert aber in der Regel nicht bekannt ist, sollte der Begriff *Messgenauigkeit* bei Genauigkeitsangaben vermieden werden. Man sollte bei praktischen Angaben entweder von der Präzision (vgl. Abschnitt 3) sprechen oder das Genauigkeitsmaß (z. B. Standardabweichung, Standardunsicherheit, Messunsicherheit) bei Genauigkeitsangaben explizit benennen.

Durch die Vergrößerung des Umfangs *n* einer Messreihe läßt sich nach Formel (7) die Standardabweichung des Mittelwertes und dementsprechend nach Formel (13) die Breite des Konfidenzintervalls reduzieren, also mit anderen Worten die Präzision des Mittelwertes erhöhen. Leider konvergiert der Mittelwert aber zum Erwartungswert μ_L der Messgröße und nicht zum richtigen Wert $\tilde{L}$. Es verbleibt also im Ergebnis ein etwaiger systematischer Fehler Δ_L; das Ergebnis ist um Δ_L *unrichtig*. Die **Richtigkeit** beschreibt also das Ausmaß der Annäherung zwischen der mittleren Position der Einschusslöcher zum wahren Wert, hier dem Zentrum der Zielscheibe.

2.7 Korrelationen

Allgemein versteht man unter Korrelationen den stochastischen Zusammenhang zwischen zwei oder mehreren Zufallsvariablen. Das Maß der Korrelation wird ausgedrückt durch den **Korrelationskoeffizieten** ρ_{xy}, der wie folgt definiert ist:

$$\rho_{xy} = \frac{\sigma_{xy}}{\sigma_x \cdot \sigma_y} \quad \text{mit} \quad -1 \leq \rho_{xy} \leq 1 \ . \tag{14}$$

Die Werte σ_x^2 und σ_y^2 sind die Varianzen der jeweiligen Zufallsvariablen; der Wert σ_{xy} ist die Kovarianz der beiden Zufallsvariablen.

Korrelationen stehen in einem engen Zusammenhang zu *systematischen Messabweichungen*. Es wird zwischen physikalischen und mathematischen Korrelationen unterschieden /Heunecke 2004/: **Physikalische Korrelationen** entstehen durch die jedem Beobachter bekannten Einflüsse, die vom Beobachter selbst, vom Instrument und von den örtlichen Gegebenheiten - insbes. von solchen meteorologischer Art - ausgehend die Messungen einer oder mehrerer Beobachtungsreihen im gleichen Sinne beeinflussen. Werden Beobachtungen einer rechnerischen Umformung unterzogen, so erhält man gewöhnlich **mathematisch korrelierte Funktionen**. Kommen beide vorgenannten Ursachen gleichzeitig in Frage, so hat man eine Superposition zu **gemischt-korrelierten Größen**. Auf korrelierte Beobachtungen ist das Kovarianzfortpflanzungsgesetz (allgemeines Fehlerfortpflanzungsgesetz) anzuwenden (vgl. Abschnitt 2.8).

Korrelationen können bewirken, dass durch die Erhöhung der Anzahl der Wiederholungsmessungen die Präzision, z. B. die Standardabweichung des Mittelwertes nicht in dem Maße gesteigert wird, wie es nach der Formel (7) erwartet wird. Bei korrelierten Beobachtungen läßt sich nach /Höpcke 1980, Seite 56/ die empirische Varianz bzw. Standardabweichung eines einzelnen Messwertes nach

$$s^2 = \frac{1}{1-r} \cdot \frac{\sum_{i=1}^{n} v_i^2}{n-1} \tag{15}$$

und die des arithmetischen Mittelwertes nach

$$s_x^2 = \frac{1+(n-1)\cdot r}{1-r} \cdot \frac{\sum_{i=1}^{n} v_i^2}{n\cdot(n-1)} \tag{16}$$

bestimmen. In diesen Gleichungen bedeutet r = empirischer Korrelationskoeffizient. Genauigkeitsberechnungen, bei denen Korrelationen vernachlässigt werden, sei es bewusst oder unbewusst, täuschen zuweilen Genauigkeiten vor, die offensichtlich nicht zutreffen. Angenommen, die Messungen sind mit $r = 0{,}9$ korreliert, so ergibt sich unter Vernachlässigung der Korrelation eine um den Faktor 3,2 zu günstige Standardabweichung eines einzelnen Messwertes. Noch gravierender wirkt sich eine Vernachlässigung der Korrelationen bei der Standardabweichung des arithmetischen Mittelwertes aus. Bei einem Korrelationskoeffizienten von $r = 0{,}9$ und bei $n = 10$ durchgeführten Messungen beträgt der Faktor 9,5. Bei Vernachlässigung der Korrelation wird also eine ca. 10fach günstigere Standardabweichung für den Mittelwert vorgetäuscht.

2.8 Kovarianzfortpflanzungsgesetz

Genauigkeitsmaße für Folgewerte, die aus direkt gemessenen Messwerten rechnerisch abgeleitet werden, können nach dem Kovarianzfortpflanzungsgesetz (früher: Fehlerfortpflanzungsgesetz) berechnet werden. Die Folgewerte, die im Funktionsvektor $\mathbf{f}$ zusammengefasst sind, sind mit den Messwerten (Vektor $\mathbf{L}$) verknüpft über

$$\mathbf{f} = \varphi(\mathbf{L}) \quad . \tag{17}$$

Die Kovarianzmatrix Σ_{FF} der Folgewerte, die nach GUM als Unsicherheitsmatrix bezeichnet wird, berechnet sich nach /Pelzer 1995/:

$$\Sigma_{FF} = \mathbf{F} \cdot \Sigma_{LL} \cdot \mathbf{F}^T \quad . \tag{18}$$

Diese Beziehung wird als **Kovarianzfortpflanzungsgesetz** bezeichnet. Die Kovarianzmatrix Σ_{LL} ist gegeben durch die Varianzen und Kovarianzen der Messungen. Sie beschreibt die Genauigkeit der Messergebnisse:

$$\Sigma_{LL} = \begin{bmatrix} \sigma_{l_1}^2 & \sigma_{l_1,l_2} & \cdots & \sigma_{l_1,l_n} \\ & \sigma_{l_2}^2 & \cdots & \sigma_{l_2,l_n} \\ & & \ddots & \vdots \\ & & & \sigma_{l_n}^2 \end{bmatrix} . \tag{19}$$

Die Matrix **F** enthält die berechenbaren Differentialquotienten $\partial\varphi/\partial l$ der Funktion nach Gleichung (17):

$$\frac{\partial\varphi}{\partial l} = \mathbf{F}_{h,n} = \begin{bmatrix} \frac{\partial\varphi_1}{\partial l_1} & \cdots & \frac{\partial\varphi_1}{\partial l_n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{\partial\varphi_h}{\partial l_1} & \cdots & \frac{\partial\varphi_h}{\partial l_n} \end{bmatrix} . \tag{20}$$

Die Varianzen bzw. Standardabweichungen der Folgewerte und auch die zwischen ihnen bestehenden Kovarianzen bzw. Korrelationskoeffizienten können jetzt nach Gleichung (18) berechnet werden.

Besteht die Funktionsvektor der Gleichung (17) nur aus Produkten und Quotienten, so werden die Quadrate der partiellen Ableitungen, die indirekt nach Gleichung (18) berechnet werden, alle gleich Eins. Um die Varianz eines Folgewertes zu erhalten, können dann einfach die **relativen Varianzen** addiert werden. Diese relativen Varianzen sind auf die jeweilige Größe bezogenen Varianzen der Messwerte ($=(\sigma_{li}/l_i)^2$). Der Wert σ_{li}/l_i wird als **relative Standardabweichung** bezeichnet.

2.9 Vektorielle Messgrößen

Die Untersuchung der Eigenschaften von skalaren Messgrößen – wie in den vorangegangenen Abschnitten geschehen – ist zwar für das Verständnis sehr wichtig, reicht aber für praktische Anwendungen nicht aus. In der Praxis ist es nämlich in der Regel selbst für einfachste Fragestellungen notwendig, mehrere Messgrößen gleichzeitig zu betrachten. Die hier für skalare Messgrößen definierten Größen lassen sich in entsprechenden Vektoren entsprechend der Anzahl der beobachteten Messgrößen zusammenfassen. In analoger Weise können dann z. B. mehrdimensionale Konfidenzbereiche berechnet werden /Pelzer 1995/.

3 Genauigkeitsmaße

3.1 Wiederholpräzision

Die Wiederholpräzision ist ein qualitatives Genauigkeitsmaß, das quantitativ durch die **Wiederholstandardabweichung** ausgedrückt wird. Die Wiederholstandardabweichung wird aus den Werten der Messreihe einer Messgröße nach den Formeln (4), (6) und (7) bestimmt. Es wird also aus der Zufallsstreuung der Einzelmesswerte (zufällige Messabweichung) zum arithmetischen Mittelwert die empirische Standardabweichung s berechnet. Die Einzelmessungen werden in der Regel unter **Wiederholbedingungen** wie z. B. vom selben Beobachter nach ein- und demselben Messverfahren mit demselben Instrumentarium unmittelbar nacheinander unter den gleichen äußeren Bedingungen ausgeführt. Systematische Abweichungen, wie sie z. B. durch das Umfeld, in dem die Messungen stattfinden, oder durch das für die Messungen eingesetzte Instrumentarium einschließlich des Beobachters hervorgerufen werden, finden in der Wiederholstandardabweichung *keine* Berücksichtigung. Sind beim Messprozess systematische Messabweichungen wirksam, so könnte folgende Aussage möglich werden: *eine hoch präzise Messung ist sehr ungenau*.

Die Wiederholstandardabweichung drückt die Reproduzierbarkeit von Messungen aus, nicht aber unbedingt die Streuung zum *wahren Wert*. Die Wiederholstandardabweichung wird dort verwendet, wo es um die Festlegung von Genauigkeitsmaßen für Veränderungen bzw. Differenzen geht, also z. B. bei Deformationen bzw. Lageveränderungen von Objektpunkten.

In den einzelnen Disziplinen ist der Sachverhalt der Wiederholpräzision unterschiedlich dargestellt worden. Im Vermessungswesen sprach man von „innerer Genauigkeit“, wenn man die Präzision einer Messgröße meinte.

3.2 Vergleichspräzision

Werden hingegen die Messungen von verschiedenen Beobachtern mit unterschiedlichen Messverfahren zu verschiedenen Zeitpunkten bei unterschiedlichen äußeren Bedinungen ausgeführt, so werden bei den eingesetzten Messverfahren nicht erfasste systematische Messabweichungen zu einer größeren Streuung der Einzelmesswerte führen als bei unter Wiederholbedingungen ausgeführten Messungen. Die aus den Messabweichungen zum arithmetischen Mittelwert berechnete empirische Standardabweichung wird folglich größer sein als die vergleichbare Wiederholstandardabweichung. Die so berechnete empirische Standardabweichung wird als **Vergleichsstandardabweichung** (quantitatives Genauigkeitsmaß) bezeichnet; das entsprechende qualitative Genauigkeitsmaß ist die Vergleichspräzision. Die Vergleichspräzision charakterisiert die Verhältnisse zum wahren Wert zutreffender als die Wiederholpräzision; sie wird deshalb bevorzugt dort angewendet, wo es darum geht, den absoluten Wert der Messgröße genauigkeitsmäßig zu beschreiben. Im Vermessungswesen wird bzw. wurde die Vergleichsstandardabweichung als „äußere Genauigkeit“ bezeichnet.

3.3 Standard- und Messunsicherheit

Für die Bewertung und Angabe der Messunsicherheit hat sich in den letzten Jahren der von der internationalen Standardisierungsorganisation ISO im Auftrag mehrerer internationaler Organisationen herausgegebene „Guide to the Expression of Uncertainly in Measurement“, kurz GUM, als international akzeptierter Standard durchgesetzt /Sommer und Siebert 2004/. In deutscher Sprache ist der GUM als Vornorm DIN V ENV 13005 „Leitfaden zur Angabe der Unsicherheit beim Messen“ erschienen /DIN 13005/. Die **Messunsicherheit** ist ein Maß für die durch unvollständige Information hervorgerufene Unvollständigkeit der Kenntnis der Messgröße /Weise und Wöger 1999/. Diese allgemeine Definition besagt, dass das Messergebnis nach Korrektur aller bekannten systematischen Einflüsse immer nur ein *Schätzwert* der Messgröße ist, die mit einer Unsicherheit behaftet ist, die sich aus **zufälligen** Messabweichungen und **unvollkommener** Berichtigung des Ergebnisses bezüglich der systematischen Einflussparameter ableitet /Heister 2001/.

Die entscheidenden Aufgaben der Messunsicherheitsbewertung nach GUM sind
1. Darlegen der Kenntnisse über die Messung und über die Eingangsgrößen,
2. Modellieren der Messung,
3. Genauigkeitsbewertung der Mess- und Eingangsgrößen und
4. Angabe des vollständigen Messergebnisses.

Ziel der quantitativen Einschätzung der am Messergebnis beteiligten Größen ist in einem ersten Schritt, jeden Messwert durch eine Standardabweichung genauigkeitsmäßig zu bewerten, um dann damit die Messunsicherheit des Messergebnisses abzuleiten. Die quantitative Ermittlung der Messunsicherheit setzt sich dabei aus mehreren Komponenten zusammen, die sich nach der Art, in der ihr Zahlenwert geschätzt wird, in zwei Kategorien einteilen lassen:
- A: Komponenten, die mit statistischen Methoden berechnet werden,
- B: Komponenten, die auf andere Weise ermittelt werden.

Die Komponenten in **Kategorie A** werden durch geschätzte Varianzen s_i^2 (oder geschätzte Standardabweichungen s_i) und die Anzahl η_i der Freiheitsgrade gekennzeichnet. Die Varianzen ergeben sich aus Wiederholungsmessungen oder aus Ausgleichungsberechnungen redundanter Messungen. Wenn erforderlich, sind auch Kovarianzen zu berücksichtigen. Die Standardabweichungen der Kategorie A können als normalverteilte, stochastische Einflussgrößen quadratisch zu der **Standardunsicherheit** zusammengefasst werden. Der GUM und auch andere Literaturstellen sind in der Definition der Standardunsicherheit und ihrer Abgrenzung zur Messunsicherheit nicht eindeutig.

Die Komponenten in **Kategorie B** sind durch Größen u_j^2 zu charakterisieren, die als Näherungen der entsprechenden Varianzen angesehen werden können. Die Komponenten in Kategorie B können *nicht* aufgrund einer statistischen Analyse berechnet werden. Vielmehr fließen hier messtechnisch oder wissenschaftlich fundierte Kenntnisse bzw. Erfahrungen über den Messprozess ein. Über das Einschätzen der Variationsbereiche von nicht bekannten systematischen Abweichungen einschließlich des Schätzens ihrer zugrunde liegenden Wahrscheinlichkeitsverteilungen (z. B. Rechteck- und Dreiecks-Verteilung (Abschnitt 2.4)) können dann Varianzen bzw. Standardabweichungen nach der Formel (10) abgeleitet werden. Auf dieses zum Teil komplexe Berechnungsverfahren kann hier nicht im Einzelnen eingegangen werden; es sei auf die entsprechende Fachliteratur verwiesen /DIN 13005/, /Heister 2001/, /Sommer und Siebert 2004/. Die Größen u_j^2 werden wie Varianzen und die Größen u_j wie Standardabweichungen behandelt, obwohl die theoretischen statistischen Voraussetzungen nicht unbedingt gegeben sind. In der Kategorie B wird der Versuch unternommen, vornehmlich *nicht erfasste systematische Messabweichungen* genauigkeitsmäßig zu bewerten oder wenigstens abzuschätzen, um sie in der Messunsicherheitsanalyse zu berücksichtigen.

Im zweiten Schritt ist das Modell der Auswertung aufzustellen. Die Messgröße *Y* stellt sich als Funktion der Eingangsgrößen X_i dar:

$$Y = f(X_1, X_2, \cdots, X_n) \quad . \tag{21}$$

In der Modellfunktion der Gleichung (21) sollen alle Größen und Korrektionen enthalten sein, die einen signifikanten Beitrag zur Messunsicherheit liefern können.

Durch Anwendung des Kovarianzfortpflanzungsgesetzes (Abschnitt 2.8) auf die Modellfunktion (21) wird im dritten Schritt mit den nach der Kategorie A oder B berechneten Varianzen bzw. Standardabweichungen die **kombinierte Messunsicherheit** u_c berechnet. Die Einzelkomponenten der *nicht erfassten systematischen Messabweichungen* werden also hier auch quadratisch zusammengefasst. Die früher übliche lineare Addition der maximalen systematischen Teilunsicherheiten („worst case") ergibt Gesamtunsicherheiten, die zwar „auf der sicheren Seite" liegen, aber mit zunehmender Anzahl der in die Abschätzung eingehenden Komponenten zu einer Überschätzung führen und damit keine realistische Abschätzung mehr darstellen /Schmidt, M. 2003/.

Nach dem GUM wird als **Messunsicherheit** ein dem Messergebnis zugeordneter Parameter bezeichnet, der die Streuung der Werte kennzeichnet, die vernünftigerweise der Messgröße zugeordnet werden könnte /DIN 13005/.

In besonderen Fällen, z. B. in industriellen Bereichen und in Bereichen, wo die Beziehung zu Toleranzen herzustellen ist, wird die **erweiterte Messunsicherheit** *U* verwendet. Sie ergibt sich aus der kombinierten Messunsicherheit u_c durch Multiplikation mit dem Erweiterungsfaktor *k*. Es ist

$$U = k \cdot u_c \quad . \tag{22}$$

Häufig wird dabei **k = 2** gewählt, was zu einem Intervall ±*U* führt. Bei normalverteilten Messungen entspricht die mit dem Faktor *k = 2* berechnete erweiterte Messunsicherheit einem Vertrauensbereich von 95,4 % Sicherheitswahrscheinlichkeit. Für den Faktor k = 1 beträgt die Sicherheitswahrscheinlichkeit 68,3 % und für den Faktor k = 3 entsprechend 99,7 %.

Ein **vollständiges Messergebnis** sollte gemäß GUM in der Form

$$Y = y \pm U \tag{23}$$

angegeben werden. Zusätzlich ist in jedem Fall die Angabe des gewählten Erweiterungsfaktors *k* erforderlich, wie z. B. bei einer Bestimmung des Abstandes *d* zweier Punkte:

Die erweiterte Messunsicherheit nach GUM beträgt:

d = (17,282 ± 0,002) m   (k = 2) .

Auf der Basis aller vorliegenden Informationen liegt der Wert der gemessenen Größe mit der durch den Erweiterungsfaktor k festgelegten Wahrscheinlichkeit im bezeichneten Intervall. Aus der konsequenten Anwendung des Standard-GUM-Verfahrens erhält man zwangsläufig ein **Messunsicherheitsbudget**, und dieses liefert alle erforderlichen Informationen zur Bewertung und Verbesserung des analysierten Messprozesses.

Ein Beispiel aus dem Bereich der Elektrotechnik, das der Literaturstelle /Schmidt, M. 2003/ entnommen wird, illustriert die prinzipielle Vorgehensweise bei der Berechnung der Messunsicherheit:

Es soll die Stromstärke I als Spannungsabfall an einem Messwiderstand R gemessen werden.

Die zu bestimmende Stromstärke *I* beträgt ca. 10 A und der eingesetzte Messwiderstand hat einen Wert von ca. R = 0,01 Ω; die Raumtemperatur wird angegeben mit (23 ±3) °C.

Aus 12 Einzelmessungen der Spannung *U* wird als arithmetisches Mittel $\bar{U}$ = 100,03 mV erhalten. Nach den Formeln (4) und (6) ergibt sich eine Standardabweichung eines Einzelwertes zu $s_{x1} = 9{,}9 \cdot 10^{-5}$ V.

Die Varianz des Mittelwertes beträgt

$s_{x1}^2 = \frac{98}{12} \cdot 10^{-10}$ V und die relative Varianz (vgl. Abschnitt 2.8)

$$\left(s'_{x1}\right)^2 = \frac{8,2\cdot 10^{-10}}{0,1^2} = 8,2\cdot 10^{-8} \quad .$$

Das Datenblatt des Digitalvoltmeters weist für den Messbereich *200 mV* und für den Temperaturbereich *10 °C ... 35 °C* die Fehlergrenze ±*(0,025 % der Messgröße + 0,01 % des Messbereiches)* aus. Bei einer Messgröße von *100 mV* und einem Messbereich von *200 mV* ergibt sich für das Beispiel eine Fehlergrenze von 0,045 %. Unter Annahme einer Rechteckverteilung (siehe Abschnitt 2.4.3) wird diese Fehlergrenze in eine relative Varianz umgerechnet:

$$\left(s'_{x2}\right)^2 = \frac{4,5^2}{3}\cdot 10^{-8} = 6,75\cdot 10^{-8} \quad .$$

Der Messwiderstand hat einen Wert von *R = 0,010018 Ω* bei *10 A* und einer Temperatur von *23 °C*. Im Datenblatt wird die relative Messunsicherheit des Widerstandes angegeben mit $6\cdot 10^{-4}$, k =2. Wegen k = 2 beträgt die relative Standardabweichung $3\cdot 10^{-4}$ und die relative Varianz

$$\left(s'_{x3}\right)^2 = 9\cdot 10^{-8} .$$

Der relative Temperaturkoeffizient des Messwiderstandes wird angegeben mit $5\cdot 10^{-5}/K$ zwischen 15 °C ... 25 °C. Wieder unter Annahme einer Rechteckverteilung ergibt sich für den vorhandenen Temperaturbereich von ±3 K direkt die relative Varianz

$$\left(s'_{x4}\right)^2 = \frac{1}{3}\cdot\left(3\cdot 5\right)^2\cdot 10^{-10} = 0,75\cdot 10^{-8} \quad .$$

Nach dem Ohmschen Gesetz wird die Stromstärke *I* als Messergebnis berechnet:

$$I = \frac{U}{R} = \frac{0,10003}{0,010018} = 9,985 \text{ A} \quad .$$

Die relative Varianz dieses Messergebnissen ergibt sich als arithmetische Summe (vgl. Abschnitt 2.8):

$$\left(s_y^{'}\right)^2=\left(s_{x1}^{'}\right)^2+\left(s_{x2}^{'}\right)^2+\left(s_{x3}^{'}\right)^2+\left(s_{x4}^{'}\right)^2 \quad ,$$

$$\left(s_y^{'}\right)^2=(8,2+6,75+9+0,75)\cdot 10^{-8} \quad .$$

Die relative Standardabweichung bzw. relative kombinierte Messunsicherheit ist dann

$$s_y^{'}=4,97\cdot 10^{-4},\ \ \text{k=1} \quad .$$

Das vollständige Messergebnis mit der erweiterten Messunsicherheit lautet

Der gemessene elektrische Strom hat einen Wert von
$(9,985 \pm 9,9 \times 10^{-3})$ A $\quad$ (k = 2).

Weitere praktische Beispiele, aus denen die Genauigkeitsanalyse nach dem GUM verständlicher wird, sind in /DIN 13005/, /Heister 2001/, /Lang 2001/, /Schmidt, M. 2003/ zu finden.

4 Zusammenfassung und Ausblick

Besonders bei der Zusammenarbeit unterschiedlicher Fachdisziplinen an einem Projekt sind fundierte Kenntnisse über die Hintergründe bei der Angabe und Interpretation von Genauigkeitsmaßen wichtig. In diesem Beitrag wurde versucht, einige Hintergründe und Voraussetzungen für die Bestimmung von Genauigkeitsmaßen aufzuzeigen, um Fehlinterpretationen zu vermeiden. Es stellt ein besonderes Problem in der Messtechnik dar, systematische Messabweichungen im Messprozess zu erkennen, zu bestimmen, richtig einzuschätzen und letztlich *nicht erfasste systematische Messabweichungen* im Genauigkeitsmaß zutreffend zu berücksichtigen. Einen Ansatz dazu liefert das Bewertungskonzept des GUM bei der Ermittlung der Messunsicherheit. Auch wenn die theoretischen Grundlagen bei diesem Konzept nicht immer gegeben sind, sollte doch der Nutzen des GUM erkannt werden. Auf Grundlage des GUM können verschiedene Fachdisziplinen ein einheitliches Verfahren bei der Ermittlung von Genauigkeitsmaßen anwenden. Es bleibt zu hoffen, dass das Bewertungskonzept des GUM eine breitere Anwendung in der Praxis findet und in Genauigkeitsfragen eine Schnittstelle zu den verschiedenen Fachdisziplinen entsteht.

5 Literatur

DIN 13005: DIN V DNV 13005: Leitfaden zur Angabe der Unsicherheit beim Messen (ENV 13005: 1999), Deutsches Institut für Normung e. V., Berlin 1999.

Hartung, J. (1984): Statistik – Lehr- und Handbuch der angewandten Statistik. Oldenbourg Verlag, München 1984.

Heister, H. (2001): Zur Angabe der Meßunsicherheit in der geodätischen Meßtechnik. In: Schriftenreihe des DVW e.V. – Gesellschaft für Geodäsie, Geoinformation und Landmanagement Heft 42, Seite 108-119, Konrad Wittwer Verlag, Stuttgart 2001.

Heunecke, O. (2004): Korrelationen in der Messtechnik. Vortrag beim Festkolloquium zur Verabschiedung von Prof. Pelzer am 20. Januar 2004 in Hannover.

Höpcke, W. (1980): Fehlerlehre und Ausgleichungsrechnung. Walter de Gruyter Verlag, Berlin 1980.

Kessel, W. (1998): Meßunsicherheit, ein wichtiges Element der Qualitätssicherung. Unter http://www.ptb.de/de/publikationen/download/pdf/kessel.pdf, Braunschweig 1998.

Kreyszig, Erwin (1973): Statistische Methoden und ihre Anwendungen. Vandenhoeck & Ruprecht Verlag, Göttingen 1973.

Lang, M. (2001): Die Bestimmung von Messunsicherheiten an praktischen Beispielen. In: Schriftenreihe des DVW e.V. – Gesellschaft für Geodäsie, Geoinformation und Landmanagement Heft 42, Seite 138-150, Konrad Wittwer Verlag, Stuttgart 2001.

Pelzer, H. (1995): Auswertung und Interpretation. In: Schwarz, W. (Hrsg.): „Vermessungsverfahren im Maschinen- und Anlagenbau“, Konrad Wittwer Verlag, Stuttgart 1995.

Schmidt, H. (2003): Warum GUM? Kritische Anmerkungen zur Normdefinition der „Messunsicherheit“ und zu verzerrten „Elementarfehlermodellen“. In: Zeitschrift für Vermessungswesen ZfV 128(2003)5, Seite 303-312.

Schmidt, M. (2003): Einheitliches Verfahren zur Ermittlung von Messunsicherheiten. http://www.et.fh-jena.de/labore/mt/lehrmat/Messunsicherheiten_korrigiert.PDF

Schwarz, W. (1995): Vermessungsverfahren im Maschinen- und Anlagenbau. Konrad Wittwer Verlag, Stuttgart 1995.

Sommer, K.-D.; Siebert, B. R. L. (2004): Praxisgerechtes Bestimmen der Messunsicherheit nach GUM. In: Technisches Messen tm 71(2004)2, Seite 52-66.

Weise, K.; Wöger, W. (1999): Meßunsicherheit und Meßdatenauswertung. Wiley-VCH, Weinheim 1999.

Witte, B.; Schmidt, H. (2000): Vermessungskunde und Grundlagen der Statistik für das Bauwesen. 4. Aufl., Konrad Wittwer Verlag, Stuttgart 2000.

Wolf, H. (1975): Ausgleichungsrechnung – Formeln zur praktischen Anwendung. Dümmler Verlag, Bonn 1975.