

# Einführung in die Zeitreihenanalyse Teil 2

N. Deichmann

Institut für Geophysik  
ETH-Zürich  
März 2002



# Inhalt

|                                     |           |
|-------------------------------------|-----------|
| <b>1 Digitalisierung</b>            | <b>1</b>  |
| <b>2 Die Laplace Transformation</b> | <b>5</b>  |
| <b>3 Das Seismometer</b>            | <b>11</b> |
| <b>4 Die Z-Transformation</b>       | <b>23</b> |
| <b>5 Digitale Filter</b>            | <b>32</b> |
| <b>6 Inverse Filter</b>             | <b>51</b> |
| <b>7 Anhang</b>                     | <b>59</b> |



# Kapitel 1

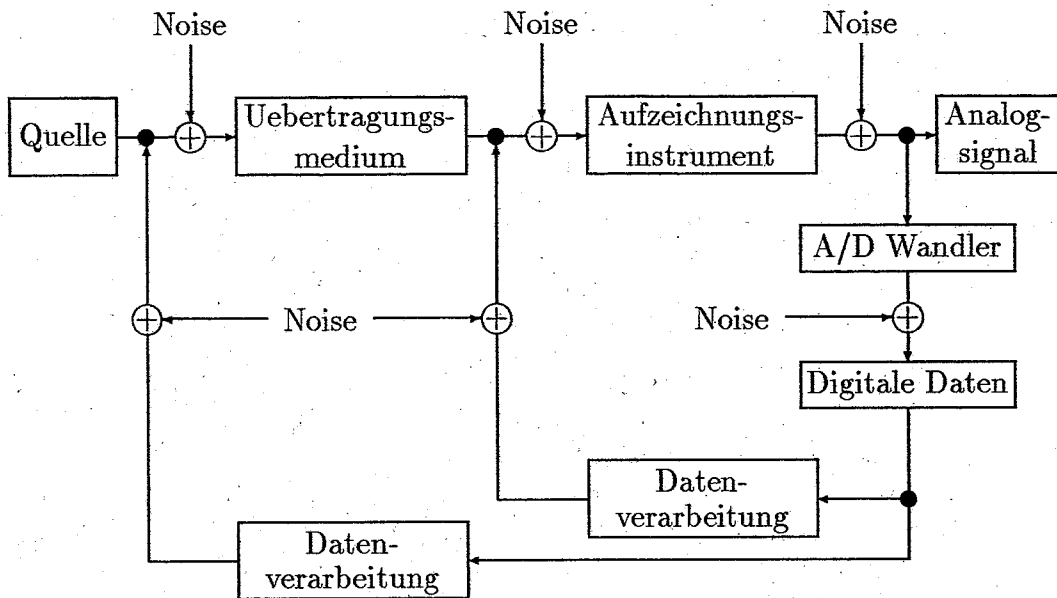
## Digitalisierung

### Einführung

Ein Merkmal der Signalanalyse ist, dass es keine eindeutige und einzig richtige Lösung oder Antwort zu einem Problem gibt, sondern dass die anzuwendenden Methoden von den gegebenen Daten, von der gewünschten Information und vom möglichen Aufwand abhängen. Das Vorgehen wird im Allgemeinen der jeweiligen Problemstellung mehr oder weniger gut angepasst sein, aber die entsprechenden Kriterien sind oft nicht eindeutig. Es geht also in der Praxis meistens darum, die jeweiligen Vor- und Nachteile verschiedener Methoden entsprechend der vorgegebenen Problemstellung abzuwägen.

Das Schema in Abbildung 1.1 zeigt stellvertretend für viele Beobachtungen in der Geophysik, wie ein Seismogramm entsteht und was man mit der digitalen Signalverarbeitung schliesslich bezweckt. Das Quellsignal (eine von einem Erdbeben oder einer Explosion verursachte elastische Welle) wird auf seinem Weg durch die Erde in seinen Eigenschaften stark verändert (durch Reflexion, Brechung, Streuung und anelastische Dämpfung) und verursacht dann an der Erdoberfläche komplizierte Bodenbewegungen. Diese Bodenbewegungen werden als Seismogramm aufgezeichnet, wobei das Aufzeichnungsinstrument (Seismograph) wiederum entsprechend der jeweiligen Instrumenteneigenschaften die wahre Bodenbewegung nur verzerrt wiedergibt. In der Geophysik sind wir nun daran interessiert, aus den beobachteten Signalen entweder etwas über die Quelle oder über die Struktur des Uebertragungsmediums auszusagen. Zu diesem Zweck müssen wir versuchen, die unerwünschten Einflüsse auf das beobachtete Signal wieder rückgängig zu machen oder diese Einflüsse bei der Vorwärtsmodellierung unserer Signale zu berücksichtigen.

Die Verknüpfung zwischen Quellsignal, Uebertragungsmedium und Aufzeichnungsinstrument lässt sich mathematisch durch die Operation der *Konvolution* modellieren. Liegen nun die Signale digital, das heisst als Folge von diskreten Zahlenwerten vor, und können wir die Eigenschaften des Aufze-



Figur 1.1: Schematische Darstellung des Grundproblems der seismologischen Signalverarbeitung

ichnungsinstrumentes quantifizieren, dann ist es zum Beispiel möglich, die instrumentenbedingte Verzerrung durch die Operation der *Dekonvolution* zumindest teilweise wieder rückgängig zu machen. Dass dies nur teilweise möglich ist, hat unter Anderem damit zu tun, dass in der Praxis all diese Prozesse von *Noise* begleitet werden.

Dadurch, dass Computer für die Signalverarbeitung eingesetzt werden, kommt der diskreten Betrachtungsweise immer mehr Bedeutung zu. Diskrete Daten können durch abtasten und digitalisieren von kontinuierlichen Signalen (Bsp. Ausgang eines Seismometers) gewonnen werden, oder schon in diskreter Form anfallen (Bsp. über ein Gebiet verteilte Schweremessungen oder eine Folge von einzelnen Temperaturmessungen über ein Zeitintervall). Die Beschreibung eines Vorganges mit den kontinuierlichen Methoden der "klassischen Mathematik" (durch Darstellung mittels reeller Zahlen) im Gegensatz zur "digitalen Computer Mathematik" (Zahlendarstellung mit einer begrenzten Genauigkeit) ist eine Frage der Zweckmässigkeit und der vorhandenen Mittel. Streng genommen sind die Begriffe kontinuierlich und diskret nicht unbedingt Eigenschaften der "physikalischen Realität", sondern unserer *Modelle* der Realität und somit nur eine Frage der Betrachtungsweise. Diese eher philosophischen Ueberlegungen sind von Bedeutung zur Vermeidung von begrifflicher Verwirrung (Bsp deterministische und stochastische Signale).

Es ist zweckmässig, zwischen den mathematischen und den technischen Aspekten der Signalverarbeitung zu unterscheiden. Im ersten Fall spricht

man vom Uebergang *kontinuierlich/diskret*, im zweiten von der Umwandlung *analog/digital*. Streng genommen besteht der Uebergang vom Kontinuum zum Diskreten, bzw. vom Analogen zum Digitalen, aus zwei Teilschritten: der *Abtastung* und der *Digitalisierung im engeren Sinn*.

## Auflösung und Dynamik

Bei der Digitalisierung (im engeren Sinn) wird jedem Abtastwert ein diskreter Zahlenwert, der ein ganzzahliges Vielfaches einer kleinsten Einheit ist, zugewiesen. Dabei entstehen Rundungsfehler, die unter Umständen berücksichtigt werden müssen. Unter gewissen Annahmen kann man den Fehler als eine Ueberlagerung des wahren Signals mit einem Zufallssignal betrachten. Wird korrekt gerundet (auf die nächste ganze Zahl auf- oder abgerundet) so ist der Mittelwert  $m_e = 0$  und die Standardabweichung  $\sigma_e = n_i/\sqrt{12}$ , mit  $n_i$  die kleinste Einheit. Die Varianz einer Grösse  $x$  ist definiert durch

$$\sigma_e^2 = \int_a^b (x - m_e)^2 p(x) dx.$$

Bei einer korrekten Rundung gilt,  $a = -1/2$ ,  $b = +1/2$ ,  $m_e = 0$ . Für die Wahrscheinlichkeitsverteilung  $p(x)$  einer zwischen  $a$  und  $b$  gleichverteilten Zufallsgrösse gilt,

$$p(x) = \frac{1}{b - a} = \frac{1}{1/2 - (-1/2)} = 1.$$

Dann folgt

$$\sigma_e^2 = \int_{-1/2}^{+1/2} x^2 dx = \frac{x^3}{3} \Big|_{-1/2}^{+1/2} = \frac{1}{3}(1/8 + 1/8) = 1/12.$$

Wird hingegen auf die nächstkleinere ganze Zahl abgerundet, kommt noch ein Systematischer Fehler von  $-n_i/2$  hinzu. (Streng genommen ist diese Betrachtungsweise nicht ganz zulässig, denn eine Verteilung, welche nur durch ihren Mittelwert und ihre Varianz definiert ist, entspricht einer Gauss'schen Normalverteilung. In diesem Fall haben wir es aber mit einer gleichverteilten Zufallsgrösse zu tun.)

Das Verhältnis zwischen dem maximal und minimal darstellbaren Wert nennt man die *Dynamik* eines Signals. Sie ist oft durch die Integer Darstellung des A/D-Wandlers beschränkt.

**Beispiel:** Ein 12-bit A/D-Wandler kann Werte zwischen  $\pm 2^{11} - 1 = \pm 2047$  erfassen. Die kleinste Einheit oder die Auflösung ist somit  $1/2047$  des Maximalwertes.

In der Praxis muss man sich oft entscheiden zwischen einer maximalen Verstärkung des Eingangssignals, die die vorhandene Bodenunruhe noch auflöst, und einer minimalen Verstärkung, die die zu erwartenden stärksten Nutzsignale nicht abschneidet. In letzterem Fall spricht man von einer Übersteuerung des Aufzeichnungsinstrumentes bzw. des A/D-Wandlers.

Die Dynamik wird oft in db (Dezibel) angegeben. Für den oben erwähnten 12-bit Wandler ist die Dynamik  $20 \log_{10} 2047 = 66.22 \text{ db}$ . Zur raschen Abschätzung eines Wertes in db genügt es zu wissen, dass jede Verdoppelung ungefähr einer Zunahme um  $6 \text{ db}$  entspricht und, dass  $\pm 3 \text{ db}$  ungefähr gleich einer Multiplikation oder Division durch  $\sqrt{2}$  ist. Somit ist  $2047 \approx 2^{11} \approx 66 \text{ db}$ .

Bei der Realisierung von Breit-Band oder Ultra-Breit-Band Seismographen (broad band, BB, oder very broad band, VBB) werden 24-bit A/D-Wandler gefordert ( $\approx 140 \text{ db}$ ) um den enormen Dynamik-Bereich von 6 Größenordnungen zwischen der kurz- und langperiodischen Bodenunruhe, bzw. der entsprechenden Nutzsignale, zu überdecken. Ein sogenannter "Gain-ranging Amplifier" ist nur eine halbe Lösung. Dabei wird, damit die starken Signale nicht übersteuert werden, die Eingangsempfindlichkeit automatisch herabgesetzt, aber dadurch wird auch die Auflösung der schwächeren Signalanteile reduziert.



## Kapitel 2

# Die Laplace Transformation

### Definition

Sei  $h(t)$  eine kontinuierliche Funktion im Bereich  $t \geq 0$  dann ist die Laplace Transformation von  $h(t)$

$$\mathcal{L}\{h(t)\} = H(s) = \int_0^{\infty} h(t)e^{-st} dt.$$

Obwohl man in vielen Fällen die Variable  $s$  als reell betrachten kann, ist  $s$  im Allgemeinen komplex, mit  $s = \sigma + j\omega$ . Eine in der Praxis zweckmässige und hinreichende Bedingung für die Existenz der Laplace Transformaten ist

$$\int_0^{\infty} |h(t)|e^{-\sigma_1 t} dt < \infty$$

für ein reelles positives  $\sigma_1$ . Das heisst, mit  $t \rightarrow \infty$  darf  $|h(t)|$  nicht schneller wachsen als  $e^{\sigma_1 t}$ .

### Beziehung zwischen F. T. und L. T.

Sei  $h(t)$  causal, dann ist  $h(t) = 0$  für  $t < 0$ , und sei ausserdem

$$\int_0^{\infty} |h(t)| dt < \infty,$$

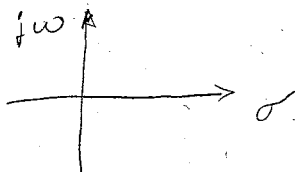
dann existiert die Fourier Transformierte von  $h(t)$

$$\mathcal{F}\{h(t)\} = H(\omega) = \int_0^{\infty} h(t)e^{-j\omega t} dt.$$

Ein Vergleich mit der Definition der Laplace Transformation zeigt dann, dass

$$\mathcal{F}\{h(t)\} = \mathcal{L}\{h(t)\}|_{s=j\omega}.$$

Bei der Laplace Transformation bewirkt der Realteil von  $s$  eine Art Dämpfung des Integranden, so dass das Laplace Integral für viele Funktionen konvergiert, für welche das Fourier Integral nicht existiert.



## Die Rücktransformation

Im allgemeinen Fall kann die inverse Laplace Transformation über das sogenannte Fourier-Mellin oder Bromwich Integral berechnet werden:

$$h(t) = \mathcal{L}^{-1}\{H(s)\} = \frac{1}{2\pi j} \int_{\sigma-j\infty}^{\sigma+j\infty} e^{st} H(s) ds.$$

Diese Integration in der komplexen Ebene wird entlang einer senkrechten Geraden durch einen fixen Punkt  $\sigma$  ausgeführt, so dass alle Singularitäten von  $H(s)$  links davon zu liegen kommen und der Residuensatz angewendet werden kann.

Sehr oft lässt sich aber  $H(s)$  durch Partialbruchzerlegung in eine Summe elementarer Funktionen umwandeln deren Laplace Transformierte in entsprechenden Tabellen nachgeschaut werden können.

## Elementare Laplace Transformationen

Es gelte immer  $h(t) = 0$  für  $t < 0$ .

$$h(t) = \delta(t) \longleftrightarrow H(s) = 1$$

$$h(t) = u_0(t) = 1 \longleftrightarrow H(s) = \frac{1}{s}, s > 0$$

$$h(t) = t^n \longleftrightarrow H(s) = \frac{n!}{s^{n+1}}, s > 0, n > 0$$

$$h(t) = e^{at} \longleftrightarrow H(s) = \frac{1}{s-a}, s > a$$

$$h(t) = t^n e^{at} \longleftrightarrow H(s) = \frac{n!}{(s-a)^{n+1}}, s > a, n > 0$$

$$h(t) = \sin at \longleftrightarrow H(s) = \frac{a}{s^2 + a^2}, s > 0$$

$$h(t) = \cos at \longleftrightarrow H(s) = \frac{s}{s^2 + a^2}, s > 0$$

$$h(t) = e^{at} \sin bt \longleftrightarrow H(s) = \frac{b}{(s-a)^2 + b^2}, s > a$$

$$h(t) = e^{at} \cos bt \longleftrightarrow H(s) = \frac{s-a}{(s-a)^2 + b^2}, s > a$$

$$h(t) = \sinh at \longleftrightarrow H(s) = \frac{a}{s^2 - a^2}, s > |a|$$

$$h(t) = \cosh at \longleftrightarrow H(s) = \frac{s}{s^2 - a^2}, s > |a|$$

## Wichtige Eigenschaften der L. T.

**Linearität**

$$\mathcal{L}\{c_1 h(t) + c_2 g(t)\} = c_1 H(s) + c_2 G(s)$$

**Verschiebung**

$$\mathcal{L}\{h(t-c)\} = e^{-cs} H(s)$$

**Substitution**

$$\mathcal{L}\{e^{at} h(t)\} = H(s-a)$$

**Skalenänderung**

$$\mathcal{L}\{h(ct)\} = \frac{1}{c} H\left(\frac{s}{c}\right), c > 0$$

**Ableitung**

$$\mathcal{L}\{h'(t)\} = sH(s) - h(0)$$

$$\mathcal{L}\{h''(t)\} = s^2 H(s) - sh(0) - h'(0)$$

**Integral**

$$\mathcal{L}\left\{\int_0^t h(\tau) d\tau\right\} = \frac{1}{s} H(s)$$

**Faltung**

$$\mathcal{L}\left\{\int_{-\infty}^{\infty} h(\tau) g(t-\tau) d\tau\right\} = \mathcal{L}\{h(t) * g(t)\} = H(s)G(s)$$

## Beispiele

### Laplace Transformation des $\delta$ -Impulses

Der  $\delta$ -Impuls ist bekanntlich keine Funktion im herkömmlichen Sinn sondern eine sogenannte *verallgemeinerte Funktion*. Eine mathematisch einwandfreie Abhandlung gehört in die Theorie der Distributionen. Anschaulich kann der  $\delta$ -Impuls aber als Limes einer von mehreren herkömmlichen Funktionen betrachtet werden. Wir betrachten eine Rechteckfunktion der Höhe  $1/\varepsilon$  und der Breite  $\varepsilon$  und mit dem linken Rand an der Stelle  $t = 0$ :

$$\delta(t) = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \begin{cases} 0 & t < 0 \\ 1/\varepsilon & 0 < t < \varepsilon \\ 0 & t > \varepsilon \end{cases}$$

Wenn  $\varepsilon$  gegen 0 geht, dann wird  $\delta(t)$  unendlich schmal und unendlich hoch. Ausserdem gilt die folgende bekannte Beziehung:

$$\int_{-\infty}^{\infty} \delta(t) dt = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{\varepsilon} dt = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \int_0^{\varepsilon} \frac{1}{\varepsilon} dt = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \left[ \frac{t}{\varepsilon} \right]_0^{\varepsilon} = 1.$$

Die Laplace Transformierte des  $\delta$ -Impulses ist

$$\mathcal{L}\{\delta(t)\} = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \int_0^{\infty} \frac{1}{\varepsilon} e^{-st} dt = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \left[ -\frac{1}{s\varepsilon} e^{-st} \right]_0^{\varepsilon} = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \frac{1 - e^{-s\varepsilon}}{s\varepsilon}.$$

Unter Anwendung der Regel von L'Hospital folgt dann

$$\mathcal{L}\{\delta(t)\} = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \frac{se^{-s\varepsilon}}{s} = 1.$$

### Laplace Transformation der Sprungfunktion

Die Heaviside'sche Sprungfunktion ist definiert als

$$u_0(t) = \begin{cases} 0 & t < 0 \\ 1 & t > 0 \end{cases}$$

Die Laplace Transformierte der Sprungfunktion ist

$$\mathcal{L}\{u_0(t)\} = \int_0^{\infty} 1 e^{-st} dt = \left[ -\frac{e^{-st}}{s} \right]_0^{\infty} = \frac{1}{s}.$$

Dieses Resultat folgt auch aus dem Integralsatz der Laplace Transformation und der Tatsache, dass die Sprungfunktion das Integral des  $\delta$ -Impulses ist.

## Nullpunktverschiebung

Sei  $H(s)$  die Laplace Transformierte von  $h(t)$  und  $h(t-c)$  die um den Betrag  $c$  nach rechts verschobene Funktion  $h(t)$ . Da eine Voraussetzung der Laplace Transformation ist, dass  $h(t) = 0$  für  $t < 0$  ist, folgt auch, dass  $h(t-c) = 0$  für  $t < c$  sein muss. Die Laplace Transformation von  $h(t-c)$  wird somit

$$\mathcal{L}\{h(t-c)\} = \int_0^{\infty} h(t-c)e^{-st} dt = \int_c^{\infty} h(t-c)e^{-st} dt$$

Mittels der Variablensubstitution  $t = \tau + c$  erhält man

$$\mathcal{L}\{h(t-c)\} = \int_0^{\infty} h(\tau)e^{-s(\tau+c)} d\tau = e^{-cs} \int_0^{\infty} h(\tau)e^{-s\tau} d\tau = e^{-cs} H(s).$$

Um die Bedingung, dass  $h(t-c) = 0$  für  $t < c$  ist, explizit zu berücksichtigen, wird der Verschiebungssatz in manchen Textbüchern auch wie folgt formuliert:

$$\mathcal{L}\{u_c(t)h(t-c)\} = e^{-cs} H(s),$$

wobei  $u_c(t)$  die Heaviside'sche Sprungfunktion an der Stelle  $t = c$  ist:

$$u_c(t) = u_0(t-c) = \begin{cases} 0 & t < c \\ 1 & t > c \end{cases}$$

## Laplace Transformation der Ableitung einer Funktion

Sei  $H(s)$  die Laplace Transformierte und  $h'(t)$  die Ableitung der Funktion  $h(t)$ . Die Laplace Transformation von  $h'(t)$  erhält man ohne Schwierigkeiten durch partielle Integration:

$$\mathcal{L}\{h'(t)\} = \int_0^{\infty} h'(t)e^{-st} dt = [h(t)e^{-st}]_0^{\infty} - \int_0^{\infty} h(t)(-s)e^{-st} dt$$

$$\mathcal{L}\{h'(t)\} = -h(0) + s \int_0^{\infty} h(t)e^{-st} dt = sH(s) - h(0).$$

Wenn  $h(0) = 0$  ist, dann erhält man also die Laplace Transformierte der Ableitung einer Funktion einfach durch Multiplikation mit  $s$  und die Transformierte des Integrals erhält man durch eine entsprechende Division durch  $s$ .

## Uebung

Gegeben sei eine lineare Differentialgleichung 2. Ordnung der Form

$$\ddot{y} + by + cy = x$$

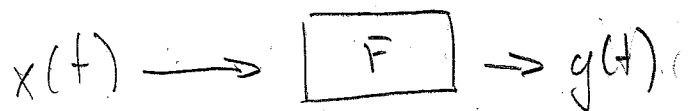
Aufgabe: Führen Sie die Laplace Transformation dieser Gleichung aus und Lösen Sie nach  $Y(s)$  auf, unter der Annahme, dass alle Anfangsbedingungen gleich 0 sind (d.h.  $\dot{y}(0) = 0$  und  $y(0) = 0$ ).

$$\Rightarrow \mathcal{L}\{\ddot{y} + by + cy\} = \mathcal{L}\{x\}$$

$$= \mathcal{L}\{\ddot{y}\} + \mathcal{L}\{by\} + \mathcal{L}\{cy\} = s^2 Y(s) - sy(0) - \dot{y}(0) + bs Y(s) - y(0) + c Y(s)$$

$$= s^2 Y(s) + bs Y(s) + c Y(s) = X(s)$$

$$= (s^2 + bs + c) Y(s) = X(s)$$



# Kapitel 3

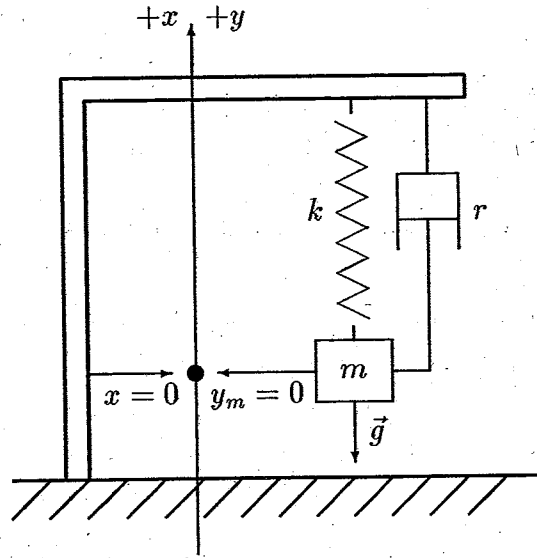
## Das Seismometer

### Einleitung

Das wichtigste Hilfsmittel zur Sichtbarmachung und zur quantitativen Erfassung der seismischen Bodenbewegung ist das Seismometer. Ein gründliches Verständnis des Funktionsprinzips dieses Instrumentes ist somit erste Voraussetzung für jegliche weitergehende Analyse seismischer Signale. Dies ist besonders wichtig, weil die Seismogramme, welche vom Seismometer aufgezeichnet werden, nicht die wahre Bodenbewegung wiedergeben, sondern nur eine Darstellung sind, welche durch die charakteristischen Eigenschaften des Seismometers modifiziert wurde. Durch geeignete Rechenverfahren können diese Modifikationen aber zumindest teilweise rückgängig gemacht und somit ein wirklichkeitstreueres Bild der Bodenbewegung erreicht werden. Aus diesem Grunde ist es nützlich sich als Einstieg in die seismische Signalverarbeitung mit der Funktionsweise des Seismometers auseinanderzusetzen. Dabei können auch viele Begriffe, die in der Signalverarbeitung ganz allgemein Verwendung finden, wie Impulsantwort, Übertragungsfunktion, Amplituden- und Phasenverhalten eines Filters, usw., anschaulich erläutert werden.

### Die Differentialgleichung des Seismometers

Betrachten wir eine Koordinatenachse, welche im Raum fixiert ist aber weder mit dem Boden noch mit dem Seismometer verbunden ist (positiv nach oben). Dann sind  $x(t)$  die Position des Seismometergehäuses (und damit des Bodens) und  $y_m(t)$  die Position der Masse bezüglich dieser Koordinatenachse. Die Federkonstante sei  $k$  und die geschwindigkeitsproportionale Dämpfungskonstante  $r$ . Für  $t \leq 0$  gilt  $x = y_m = 0$ , d.h. der Boden ist in Ruhe und die Masse ist in der Gleichgewichtslage. In der Gleichgewichtslage ist die Feder gegenüber ihrer Länge im unbelasteten Zustand um den Be-



Figur 3.1: Das Seismometer

trag  $\Delta l_0$  gestreckt und die Schwerkraft  $-mg$  ist durch die Auslenkung  $k\Delta l_0$  kompensiert. Ist die Masse gegenüber dieser Gleichgewichtslage ausgelenkt relativ zum Seismometergehäuse und in Bewegung, dann wirkt die Federkraft  $-k(y_m - x)$  und zusätzlich die geschwindigkeitsproportionale Dämpfungskraft  $-r(\dot{y}_m - \dot{x})$ . Die Bewegungsgleichung für die Auslenkung der Masse aus der Gleichgewichtslage lautet dann:

$$m\ddot{y}_m + r(\dot{y}_m - \dot{x}) + k(y_m - x) = 0.$$

Um eine Differentialgleichung für die einzige messbare Grösse, nämlich die relative Auslenkung zwischen Masse und Seismometergehäuse,

$$y(t) = y_m - x$$

zu erhalten, addiert man auf beiden Seiten  $-m\ddot{x}$ . Aus Gründen der Zweckmässigkeit dividieren wir durch  $m$  und setzen  $2\rho = r/m$  sowie  $\omega_0^2 = k/m$  und erhalten so die Bewegungsgleichung des Seismometers:

$$\ddot{y} + 2\rho\dot{y} + \omega_0^2 y = -\ddot{x}.$$

Diese ist eine inhomogene lineare Differentialgleichung zweiter Ordnung für die relative Auslenkung  $y(t)$ . Der inhomogene Term, nämlich die treibende Kraft, ist nach Division durch  $m$  genau die Bodenbeschleunigung.

### Klassischer Lösungsweg

Da nach der Theorie von Fourier die meisten Funktionen als Ueberlagerung von harmonischen Schwingungen verschiedener Frequenzen dargestellt werden können, betrachten wir als Input eine Bodenbewegung (Verschiebung)



in Form einer harmonischen Schwingung mit Kreisfrequenz  $\omega$ , die gegeben ist durch  $x(t) = A_i e^{j\omega t}$ . Die Bodenbeschleunigung ist dann  $\ddot{x} = -\omega^2 A_i e^{j\omega t}$ . Es ist dann naheliegend wieder den Lösungsansatz für  $y(t)$  in Form einer harmonischen Schwingung zu machen:

$$y = A_o e^{j\omega t} \quad \ddot{y} + 2\rho\dot{y} + \omega_0^2 y = -\ddot{x}$$

$$\dot{y} = j\omega A_o e^{j\omega t}$$

$$\ddot{y} = -\omega^2 A_o e^{j\omega t}$$

$-\omega^2 A_o e^{j\omega t} + 2\rho j\omega A_o e^{j\omega t} + \omega_0^2 A_o e^{j\omega t} = -\omega^2 A_i e^{j\omega t}$

Die Koeffizienten  $A_i$  und  $A_o$  sind im Allgemeinen komplex. In die Differentialgleichung eingesetzt ergibt dies:

$$-\omega^2 A_o + 2\rho j\omega A_o + \omega_0^2 A_o = \omega^2 A_i$$

und

$$\frac{A_o}{A_i} = \frac{\omega^2}{\omega_0^2 - \omega^2 + j2\rho\omega} = H(\omega) = \frac{Y(\omega)}{X(\omega)}$$

Das Verhältnis von Ausgang ( $A_o$ ) zu Eingang ( $A_i$ ) als Funktion der Frequenz wird allgemein als Frequenzgang oder Frequenzantwort (*frequency response*) eines Systems bezeichnet. Es entspricht dem Verhältnis der Fourier Transformaten des Ausgangs zur Fourier Transformaten des entsprechenden Einganges und stellt eine vollständige und eindeutige Beschreibung der Eigenschaften des Systems dar. Oft wird  $H(\omega)$  auch als Übertragungsfunktion bezeichnet, obwohl streng genommen dieser Ausdruck dem im nächsten Abschnitt eingeführten Verhältnis der Laplace Transformaten vorbehalten sein sollte.

In unserem Fall gibt der Ausdruck  $H(\omega)$  das Verhältnis an zwischen relativer Auslenkung der Seismometermasse und der Bodenverschiebung als Funktion der Frequenz. Dabei sind  $\omega = 2\pi f$ , mit  $f$  die jeweilige Frequenz, und  $\omega_0 = 2\pi f_0$ , mit  $f_0$  die Eigenfrequenz des ungedämpften Seismometers. Durch umformen erhält man die Exponentialform der Frequenzantwort:

$$H(\omega) = \frac{A_o}{A_i} = \frac{\omega^2}{\sqrt{(\omega_0^2 - \omega^2)^2 + 4\rho^2\omega^2}} e^{j\phi}$$

wobei

$$\phi = \phi(\omega) = \arctan \frac{-2\rho\omega}{\omega_0^2 - \omega^2}$$

Oft wird die Dämpfung  $\rho = \xi\omega_0$  gesetzt. Mit  $\xi = 1$  wird  $\rho = \omega_0$  und man spricht von kritischer Dämpfung. Die jeweilige Dämpfung des Seismometers wird dann in Prozent dieser kritischen Dämpfung angegeben. Typisch ist 60-70% ( $\xi = 0.6 - 0.7$ ). Der Betrag ist dann

$$|H(\omega)| = \frac{\omega^2}{\sqrt{(\omega_0^2 - \omega^2)^2 + 4\xi^2\omega_0^2\omega^2}} = \frac{\omega^2/\omega_0^2}{\sqrt{(1 - \omega^2/\omega_0^2)^2 + 4\xi^2\omega^2/\omega_0^2}}$$

und die Phase

$$\phi(\omega) = \arctan \frac{-2\xi\omega_0\omega}{\omega_0^2 - \omega^2} = \arctan \frac{-2\xi\omega/\omega_0}{1 - \omega^2/\omega_0^2}$$

Trägt man den Betrag als Funktion von  $\omega$  auf, sieht man, dass ein Seismometer als Hochpass-Filter wirkt.

## Lösung mit Laplace Transformation

Seien  $X(s)$  und  $Y(s)$  die Laplace Transformaten von  $x(t)$  und  $y(t)$ , dann ist die Laplace Transformation der Differentialgleichung

$$\ddot{y} + 2\rho\dot{y} + \omega_0^2 y = -\ddot{x}$$

gleich

$$s^2 Y(s) - sy(0) - \dot{y}(0) + 2\rho[sY(s) - y(0)] + \omega_0^2 Y(s) = -[s^2 X(s) - sx(0) - \dot{x}(0)]$$

und

$$(s^2 + 2\rho s + \omega_0^2)Y(s) - (s + 2\rho)y(0) - \dot{y}(0) = -s^2 X(s) + sx(0) + \dot{x}(0).$$

Betrachten wir den Fall in dem zur Zeit  $t = 0$  sowohl der Boden als auch die Seismometer Masse in Ruhe sind:  $x(0) = \dot{x}(0) = 0$  und  $y(0) = \dot{y}(0) = 0$ . Dann erhalten wir die komplexe Uebertragungsfunktion (*transfer function*) des Seismometers:

$$H(s) = \frac{Y(s)}{X(s)} = \frac{-s^2}{s^2 + 2\rho s + \omega_0^2}$$

Die Variable  $s$  ist eine komplexe Variable und wird als komplexe Frequenz bezeichnet. Beschränkt man die Laplace Transformation auf die imaginäre Achse indem man  $s = j\omega$  setzt, dann erhält man die Fourier Transformation und die Uebertragungsfunktion  $H(s)$  wird zur weiter oben hergeleiteten Frequenzantwort  $H(\omega)$ .

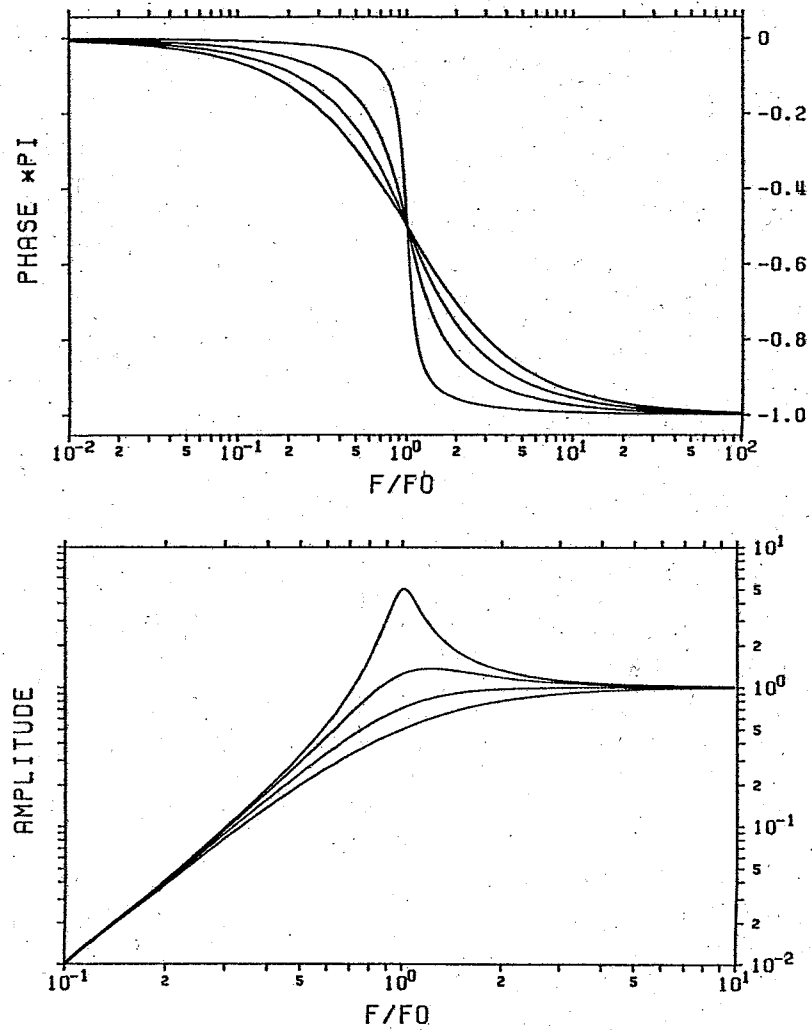
Schreibt man  $Y(s) = H(s) \cdot X(s)$ , dann beschreibt  $H(s)$  wie das System im komplexen Frequenzbereich ein Eingangssignal  $X(s)$  in ein Ausgangssignal  $Y(s)$  verwandelt. In unserem Fall entspricht  $H(s)$  dem Seismometer,  $X(s)$  der Transformaten der Bodenverschiebung und  $Y(s)$  der Transformaten der Relativen Auslenkung der Seismometermasse. Analog zur entsprechenden Eigenschaft der Fourier Transformation ist aus der Theorie der Laplace Transformation bekannt, dass der Multiplikation im Frequenzbereich eine Faltung im Zeitbereich entspricht:

$$Y(s) = H(s) \cdot X(s) \longleftrightarrow y(t) = h(t) * x(t).$$

### Frequenzgang des Seismometers

Daempfung: 0.1, 0.4, 0.7, 1.0

Output/Input: D/D, V/V, A/A



Figur 3.2: Frequenzgang des Seismometers: Die verschiedenen Kurven entsprechen unterschiedlicher, von oben nach unten zunehmender Dämpfungswerte.

Zum Beispiel, sei  $x(t) = \delta(t)$ , ein Dirac-Impuls, dann ist  $X(s) = 1$  und  $Y(s) = H(s)$ . Daraus folgt  $y(t) = h(t) * \delta(t) = h(t)$  und  $h(t)$  wird als die Impulsantwort (*impulse response*) des Systems bezeichnet. Da wir hier keine Annahmen über die Form von  $h(t)$  gemacht haben, kann man dies als ganz allgemeines Resultat formulieren:

*die Rücktransformierte der Uebertragungsfunktion ist die Impulsantwort des Systems.*

Wichtig ist, dass man sich immer vergegenwärtigt was für physikalische Grössen am Eingang und am Ausgang einer bestimmten Uebertragungsfunktion stehen. Im vorliegenden Fall handelt es sich um die Bodenverschiebung und die relative Auslenkung der Masse. Die Einheiten von Eingang und Ausgang sind also gleich.

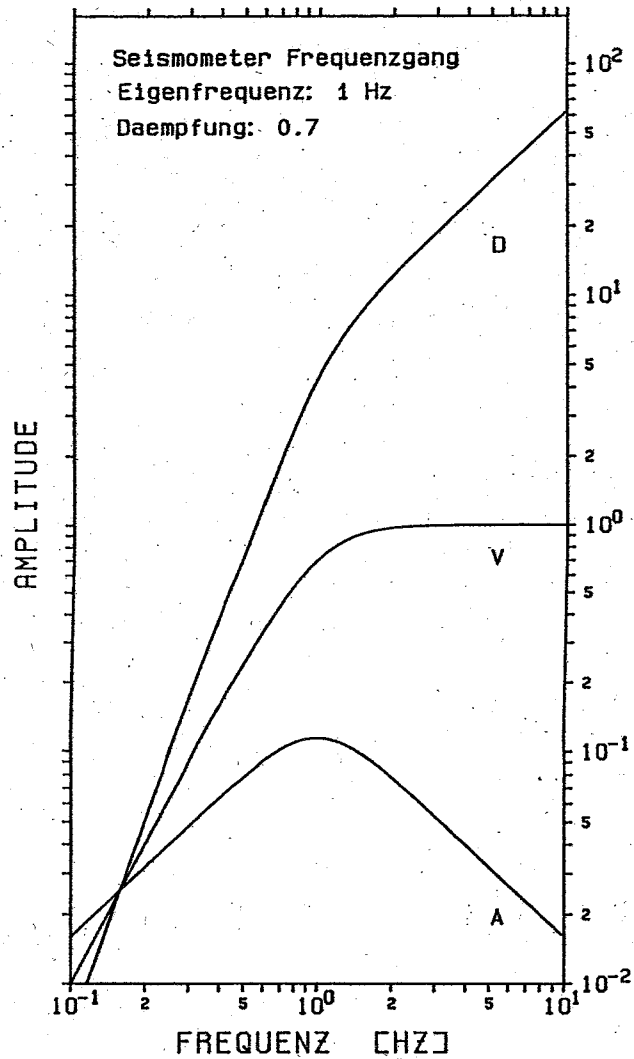
Wenn man am Seismometerausgang die relative Schwinggeschwindigkeit der Masse misst, dann gilt die hergeleitete Formel auch für die Bodenschwinggeschwindigkeit. Tatsächlich funktionieren die meisten Seismometer nach dem Prinzip der Tauchspule und die am Ausgang gemessene Spannung (das Seismogramm) ist somit geschwindigkeitsproportional. Unter Berücksichtigung der Tatsache, dass die Laplace Transformierte von  $\dot{y}(t) = sY(s) - y(0)$  und unter der Annahme, dass  $y(0) = 0$ , lautet die Uebertragungsfunktion zwischen der Bodenverschiebung und einem Geschwindigkeitsproportionalen Seismometer:

$$\frac{sY(s)}{X(s)} = \frac{-s^3}{s^2 + 2\rho s + \omega_0^2}$$

## Eichung des Seismometers

### Das Eichsignal

Als Funktionstest und zur Eichung eines Seismometers ist oft eine weitere sogenannte Eichspule eingebaut, welche erlaubt die Masse des Seismometers durch eine genau definierte Kraft auszulenken. Diese Kraft, bzw. Beschleunigung, ist proportional zum Strom der durch die Eichspule fliesst. Die Eichung kann entweder durch eine Anregung mit sinusförmigen Signalen verschiedener Frequenzen oder durch ein- und ausschalten eines konstanten Stromes erfolgen. Durch einschalten eines Stromes  $I_c$  wird die Seismometermasse einer konstanten Beschleunigung  $a_c$  ausgesetzt, welche je nach Vorzeichen entweder der Schwerkraft entgegenwirkt oder sie verstärkt. Dies bewirkt, dass sich die Masse  $m$  auf ein neues Gleichgewichtsniveau  $y_c$  einpendelt. Dabei gilt  $a_c = (k/m)y_c = \omega_0^2 y_c$ . Der Vorgang ist äquivalent zu einer konstanten Beschleunigung des ganzen Seismometers,  $a_s = -a_c = \ddot{x}(t)$ . Mathematisch wird der Ein- und Ausschaltvorgang durch die Heaviside Sprungfunktion



Figur 3.3: Amplitudengang des geschwindigkeitsproportionalen Seismometers gegenüber einer Bodenverschiebung (D), - geschwindigkeit (V) und - beschleunigung (A). Angenommen die Empfindlichkeit des Seismometers sei 1 Volt pro cm/sek im flachen Bereich der Uebertragungsfunktion (zwischen 2 und 10 Hz), dann beträgt die Spannung am Ausgang bei einer Frequenz von 0.5 Hz und einer Schwinggeschwindigkeit von 1 cm/sek nur noch 0.23 Volt. Eine Bodenverschiebung von 1 cm bei einer Frequenz von 5 Hz verursacht dann eine Spannung von 31.4 Volt am Ausgang.

$u_0(t)$  ausgedrückt:

$$\pm a_c u_0(t) = \begin{cases} 0 & t < 0 \\ \pm a_c & t > 0 \end{cases}$$

Das Einschalten eines positiven Stromes oder das Ausschalten eines negativen Stromes zur Zeit  $t = 0$  verursacht eine positive Beschleunigung auf die Seismometermasse, so dass gilt  $\ddot{x}(t) = -a_c$ , für  $t > 0$ . Die Laplace Transformierte von  $\ddot{x}$  ist dann  $s^2 X(s) = -a_c/s$  und daraus folgt,  $X(s) = -a_c/s^3$ . Damit können wir nun die Laplace Transformierte eines Eichsignals am Seismometerausgang angeben:

$$sY(s) = \frac{-s^3}{s^2 + 2\rho s + \omega_0^2} \frac{-a_c}{s^3} = \frac{a_c}{s^2 + 2\rho s + \omega_0^2}$$

Das eigentliche Eichsignal im Zeitbereich erhalten wir dann durch Rücktransformation von  $sY(s)$ :

$$sY(s) = \frac{a_c}{s^2 + 2\rho s + \omega_0^2}$$

$$sY(s) = \frac{a_c}{(s + \rho - \sqrt{\rho^2 - \omega_0^2})(s + \rho + \sqrt{\rho^2 - \omega_0^2})}$$

Für unterkritische Dämpfung ( $\rho < \omega_0$ ) wird

$$\sqrt{\rho^2 - \omega_0^2} = j\sqrt{\omega_0^2 - \rho^2} = j\Omega$$

und

$$sY(s) = \frac{a_c}{(s + \rho)^2 + \Omega^2} = \frac{a_c}{\Omega} \frac{\Omega}{(s + \rho)^2 + \Omega^2}$$

So umgeformt, hat der rechte Teil dieser Gleichung die Form

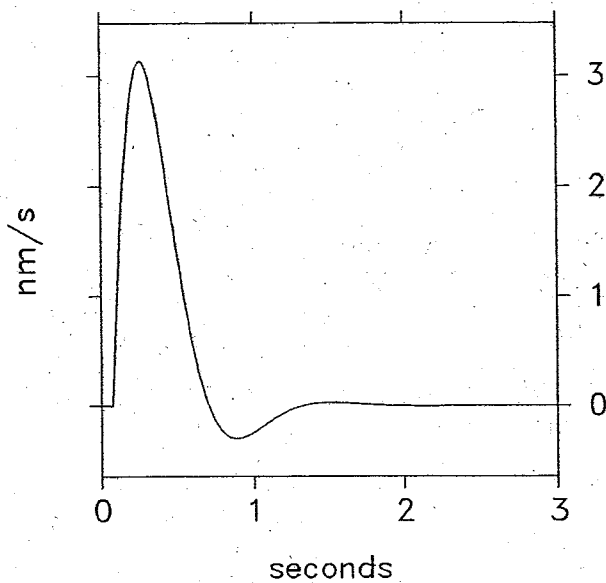
$$\frac{b}{(s - a)^2 + b^2}$$

Gemäss der Tabelle der elementaren Laplace Transformationen ist das die Laplace Transformierte von  $e^{at} \sin bt$ . Damit erhalten wir die gesuchte Lösung für das Eichsignal:

$$\dot{y}(t) = \frac{a_c}{\Omega} e^{-\rho t} \sin \Omega t.$$

Ist die Dämpfung in % der kritischen Dämpfung angegeben, dann ist  $\rho = \xi \omega_0$  und  $\Omega^2 = (1 - \xi^2) \omega_0^2$ . Bei kritischer Dämpfung ist  $\xi = 1$ , typische Seismometer Werte sind 0.6 - 0.7. Die Gleichung des Eichimpulses lautet dann:

$$\dot{y}(t) = \frac{a_c}{\sqrt{1 - \xi^2} \omega_0} e^{-\xi \omega_0 t} \sin(\sqrt{1 - \xi^2} \omega_0 t).$$



Figur 3.4: Analytisches Eichsignal: Eigenfrequenz 1 Hz, Dämpfung 0.6, Ausgang Geschwindigkeit, Eingang Sprungfunktion in der Beschleunigung

Wie weiter oben schon gesagt, wirkt das Seismometer alleine wie ein Hochpass-Filter. In der Praxis muss aber, um das Abtasttheorem nicht zu verletzen, noch ein Tiefpass-Filter vor dem Analog/Digital-Wandler hinzugeschaltet werden. Im Frequenzbereich entspricht dies einfach einer Multiplikation der Übertragungsfunktion des Seismometers mit derjenigen des Tiefpass-Filters und im Zeitbereich einer Faltung der beiden Impulsantworten.

### Uebung

Bei kritischer Dämpfung wird  $\rho = \omega_0$  und  $\Omega = 0$ . Frage: Wie sieht das Eichsignal  $\dot{y}(t)$  in diesem Fall aus? Zeigen Sie (mit Hilfe der Tabelle der elementaren Laplace Transformationen), dass die Rücktransformation der Gleichung

$$sY(s) = \frac{a_c}{s^2 + 2\rho s + \omega_0^2}$$

das gleiche Resultat liefert wie die Anwendung der Regel von L'Hospital auf die Gleichung

$$\dot{y}(t) = \frac{a_c}{\Omega} e^{-\rho t} \sin \Omega t.$$

$$\lim_{\Omega \rightarrow 0} \frac{a_c}{\Omega} e^{-st} \sin \Omega t = \lim_{\Omega \rightarrow 0} \frac{(a_c e^{-st} \sin \Omega t)'}{\Omega'} = \dots$$

## Vergleich zwischen Seismometer und Oszillator

Betrachten wir den Fall in dem ein konstanter Strom ( $-I_c$ ) durch die Eichspule des Seismometers fließt. Dadurch erfährt die Masse eine zur Erdbeschleunigung ( $-g$ ) zusätzliche Beschleunigung ( $-a_c$ ) und sie wird in eine neue Gleichgewichtsposition ( $-y_c$ ) ausgelenkt, wo sie wieder in Ruhe ist ( $\dot{y} = 0$ ). Nach dem Gesetz der Federkraft gilt  $-a_c = -(k/m)y_c = -\omega_0^2 y_c$ . Wird der Strom nun abgestellt, so erfährt die Masse eine Beschleunigung  $+a_c = \omega_0^2 y_c$  und sie pendelt sich wieder in die ursprüngliche Gleichgewichtslage  $y = 0$  ein. Bei diesem Vorgang misst man am Seismometer Ausgang das geschwindigkeitsproportionale Eichsignal, das oben hergeleitet wurde:

$$\dot{y}(t) = \frac{a_c}{\Omega} e^{-\rho t} \sin \Omega t.$$

Mit  $a_c = \omega_0^2 y_c$  wird

$$\dot{y}(t) = y_c \frac{\omega_0^2}{\Omega} e^{-\rho t} \sin \Omega t.$$

Physikalisch entspricht der zuletzt beschriebene Vorgang genau dem Fall eines gedämpften harmonischen Oszillators mit den Anfangsbedingungen  $y(0) = -y_c$  und  $\dot{y}(0) = 0$ . Die entsprechende Lösung für die Auslenkung der Masse lautet:

$$y(t) = -y_c e^{-\rho t} \left( \cos \Omega t + \frac{\rho}{\Omega} \sin \Omega t \right).$$

Leitet man diese Beziehung ab, so erhält man wie erwartet

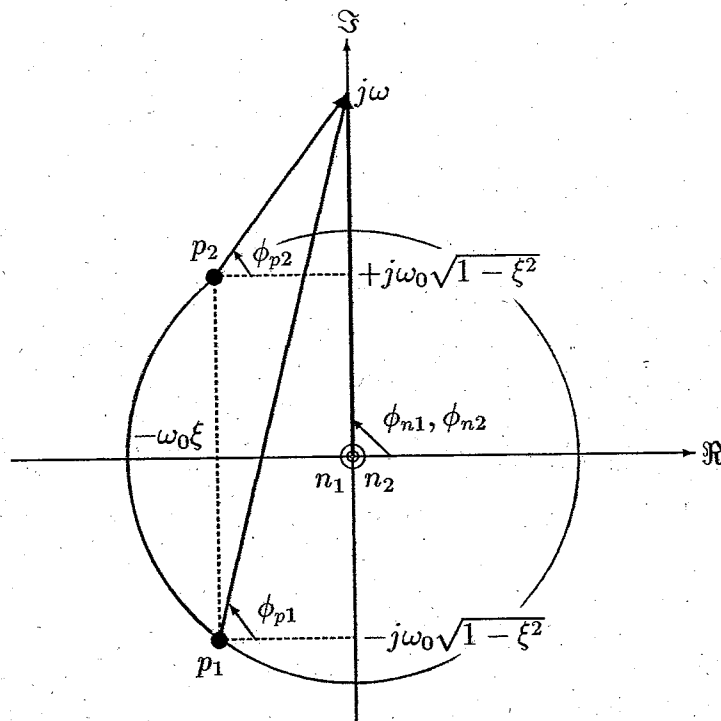
$$\dot{y}(t) = y_c \frac{\omega_0^2}{\Omega} e^{-\rho t} \sin \Omega t.$$

## Pole und Nullstellen

Wie wir gesehen haben ist das Verhalten des Seismometers durch die Uebertragungsfunktion eindeutig bestimmt. Wenn die Uebertragungsfunktion als Verhältnis von zwei Polynomen dargestellt werden kann, dann ist es oft zweckmässig sie durch ihre Pole und Nullstellen zu definieren. Die Nullstellen sind einfach die Nullstellen des Zähler-Polynoms und die Pole entsprechen den Nullstellen des Nenner-Polynoms. Im Falle des Seismometers können wir die Uebertragungsfunktion wie folgt umschreiben:

$$H(s) = -\frac{s^2}{s^2 + 2\xi\omega_0 s + \omega_0^2}$$
$$H(s) = -\frac{(s-0)(s-0)}{[s + \omega_0(\xi + j\sqrt{1-\xi^2})][s + \omega_0(\xi - j\sqrt{1-\xi^2})]}.$$





Figur 3.5: Darstellung der Pole (•) und Nullstellen (o) der Uebertragungsfunktion des Seismometers in der komplexen s-Ebene.

Wir haben also die doppelte Nullstelle  $n_1 = n_2 = 0$  und die zwei Pole

$$p_1 = -\omega_0(\xi + j\sqrt{1-\xi^2}),$$

$$p_2 = -\omega_0(\xi - j\sqrt{1-\xi^2}).$$

Wie aus der graphischen Darstellung in der komplexen s-Ebene ersichtlich ist (Figur 3.5), liegen die Nullstellen im Ursprung und die zwei Pole in der linken Halbebene auf einem Kreis mit Radius  $= \omega_0$ . Die Lage der Pole in der linken Halbebene ist eine Eigenschaft aller stabilen Systeme. Da in unserem Fall der Abstand der Pole von der imaginären Achse  $= -\xi\omega_0$  ist, würde eine Lage der Pole in der rechten Halbebene bedeuten, dass der Dämpfungsterm  $\xi < 0$  sein müsste. Dann würde die Impulsantwort nicht exponentiell gedämpft sein, sondern mit der Zeit exponentiell anwachsen und somit wäre das System instabil. Dass die Pole als konjugiert komplexes Paar auftreten ist die Folge der Tatsache, dass die Ausgangsgleichung eine lineare Differentialgleichung mit reellen Koeffizienten ist. Die Systemeigenschaften des Seismometers lassen sich also durch die vier Wertepaare, die den komplexen Polen und Nullstellen entsprechen, vollständig beschreiben.

Die Darstellung in Form von Polen und Nullstellen hat nicht nur den Vorteil der Einfachheit, sondern erlaubt auch eine graphische Bestimmung der wichtigsten Systemeigenschaften. Um die Frequenzantwort zu erhalten müssen wir die Uebertragungsfunktion für die gewünschten Werte von  $j\omega$  entlang der imaginären Achse auswerten. Wir ersetzen also  $s$  durch  $j\omega$  und

erhalten dann

$$H(j\omega) = \frac{(j\omega - 0)(j\omega - 0)}{[\xi\omega_0 + j(\omega + \omega_0\sqrt{1 - \xi^2})][\xi\omega_0 + j(\omega - \omega_0\sqrt{1 - \xi^2})]}$$

Die einzelnen Faktoren des Nenners und Zählers können als Vektoren in der komplexen Ebene aufgefasst werden, die von den Polen und Nullstellen auf den entsprechenden Wert von  $j\omega$  auf der imaginären Achse gerichtet sind.

Stellt man die komplexen Pole und Nullstellen als Produkt von Betrag und Argument dar, dann lautet die Beziehung für die Uebertragungsfunktion

$$H(j\omega) = \frac{|A_{n1}|e^{j\phi_{n1}}|A_{n2}|e^{j\phi_{n2}} \dots}{|A_{p1}|e^{j\phi_{p1}}|A_{p2}|e^{j\phi_{p2}} \dots},$$

wobei  $n1, n2, \dots$  die Nullstellen und  $p1, p2, \dots$  die Pole bezeichnen. Diese Beziehung kann man wie folgt umschreiben:

$$H(j\omega) = \frac{(|A_{n1}||A_{n2}| \dots)}{(|A_{p1}||A_{p2}| \dots)} e^{(j\phi_{n1} + j\phi_{n2} + \dots) - (j\phi_{p1} + j\phi_{p2} + \dots)}.$$

Daraus ist ersichtlich, dass sich der Betrag der Frequenzantwort des Gesamtsystems aus dem Produkt der Beträge der Nullstellen-Vektoren dividiert durch das Produkt der Beträge der Pol-Vektoren ergibt. Analog ergibt sich die Phase aus der Summe der Phasenwinkel der Nullstellen-Vektoren minus der Summe der Phasenwinkel der Pol-Vektoren. Dieses gilt nicht nur für das Seismometer, sondern für beliebig komplizierte lineare zeitinvariante Systeme.

# Kapitel 4

## Die Z-Transformation

### Definition

Eine Folge zeitdiskreter Daten mit dem konstanten Abtastintervall  $T$  kann in folgender Form geschrieben werden:

$$[x_k] = x_0, x_1, x_2, \dots, x_k, \dots$$

wobei jedes  $x_k$  den Wert (Zahl) einer Variablen  $x(t)$  zur Zeit  $t = kT$  darstellt.

Wir können diese Daten in der Form

$$x_0 + x_1 z^{-1} + x_2 z^{-2} + \dots + x_k z^{-k} \dots$$

schreiben. Die obige Form stellt eine *formale Potenzreihe* in der Variable  $z^{-1}$  dar. Wir können sie auch in der kompakten Form schreiben

$$Z[x_k] = \sum_{k=0}^{\infty} x_k z^{-k}.$$

Die obige Darstellung heisst die Z-Transformierte (*Z-transform*) der Sequenz  $x_k$ . Wir werden in Zukunft für die Z-Transformierte entweder  $Z[x_k]$  oder  $X(z)$  schreiben. Wir haben hier angenommen, dass die Folge zeitdiskreter Daten zum Zeitpunkt  $t = 0$  beginnt. Beachte, dass  $z$  hier nur die Rolle einer Zeitmarke spielt. Wir haben weder gesagt, dass  $z$  eine komplexe Variable ist, noch dass die Potenzreihe Konvergenzkriterien zu erfüllen hat. Die Koeffizienten der Potenzreihe sind einfach die Stützwerte (Abtastwerte) der Zeitserie.

Die Z-Transformation ist für die Mathematik des Diskreten das Gegenstück zur Laplace-Transformation im Kontinuum. Sie erlaubt es, verschiedene Operationen in einfacher Weise auszuführen und die Eigenschaften digitaler Filter in kompakter Art darzustellen. Betrachtet man ausserdem  $z$  als eine komplexe Variable, so stehen einem viele nützliche Ergebnisse der komplexen Analysis zur Verfügung.

**Hinweis:** In manchen Büchern und Arbeiten wird die Z-Transformation mit umgekehrtem Vorzeichen im Exponenten definiert, d.h. als Potenzreihe in  $z^k$  statt in  $z^{-k}$ . Siehe z.Bsp. das Buch von Buttkus<sup>1</sup>. Obwohl die zwei Schreibweisen einander äquivalent sind, ändern sich die Beziehungen zu den Fourier- und Laplace-Transformationen sowie die entsprechenden Konvergenzkriterien.

## Eigenschaften der Z-Transformation

Seien im Folgenden  $x_k$  und  $y_k$  diskrete Datenfolgen und  $X(z)$  sowie  $Y(z)$  die entsprechenden Z-Transformierten.

### Linearität

Die Z-Transformation ist eine lineare Operation:

$$\alpha x_k + \beta y_k \longleftrightarrow \alpha X(z) + \beta Y(z).$$

### Verschiebung

Was geschieht, wenn wir die Werte der Zeitreihe um die Zeit  $nT$  verzögern?

$$Z[x_{k-n}] = \sum_k x_{k-n} z^{-k}$$

oder

$$Z[x_{k-n}] = z^{-n} \sum_k x_{k-n} z^{-(k-n)} = z^{-n} \sum_m x_m z^{-m}$$

also

$$Z[x_{k-n}] = z^{-n} Z[x_k].$$

Wir haben hier eine erste Interpretation von  $z^{-1}$  ( $z^{-1}$  als Verschiebungsoperator) gegeben. Die Multiplikation der Z-Transformierten einer Zeitsequenz  $x_k$  mit  $z^{-1}$  entspricht einer Verzögerung der Zeitserie um das Zeitintervall  $T$ . Ganz allgemein gilt

$$x_{k\pm n} \longleftrightarrow z^{\pm n} X(z).$$

Hier gilt es jedoch zu beachten, dass bei einer Definition der Z-Transformation mit positivem Exponenten die Vorzeichen umgekehrt sind.

### Multiplikation

$$a^n x_k \longleftrightarrow X(az)$$

$$nx_k \longleftrightarrow z \frac{d}{dz} X(z)$$

<sup>1</sup>B. Buttkus, Spektralanalyse und Filtertheorie in der angewandten Geophysik, Springer Verlag, Berlin (1991)

## Zeitliche Umkehr

$$x_{-n} \longleftrightarrow X\left(\frac{1}{z}\right)$$

## Faltung

Analog zur entsprechenden Eigenschaft der Fourier- und Laplace-Transformationen entspricht die Faltung im Zeitbereich einer Multiplikation im Z-Bereich:

$$x_n * y_n \longleftrightarrow X(z)Y(z).$$

## Beispiele

**Einheitsimpuls:** Es sei die Folge  $[u_k]$  gegeben

$$u_k = \delta_k = \begin{cases} 0, & \text{für } k < 0; \\ 1, & \text{für } k = 0; \\ 0, & \text{für } k > 0. \end{cases}$$

Die Z-Transformierte von  $[u_k]$  ist dann

$$U(z) = 1.$$

**Schrittfunktion:** Sei

$$u_k = \begin{cases} 0, & \text{für } k < 0; \\ 1, & \text{für } k \geq 0. \end{cases}$$

Die Z-Transformierte von  $[u_k]$  ist:

$$U(z) = \sum_{k=0}^{\infty} z^{-k}$$

Dies stellt eine geometrische Reihe in der Variablen  $z$  dar. Betrachten wir  $z$  als eine komplexe Variable, dann gilt für  $|z^{-1}| < 1$

$$U(z) = \frac{1}{(1 - z^{-1})}.$$

Wir haben hiermit  $U(z)$  in *geschlossener Form* angegeben. Sie ist ein einfaches Beispiel eines Polynomquotienten (Zähler nullten Grades, Nenner ersten Grades) und ist für die Darstellung von diskreten Übertragungsfunktionen (z. Bsp. von Filtern) eine sehr nützliche Form.

## Rücktransformation

Ist  $F(z)$  in geschlossener Form vorhanden, dann können wir die Funktion  $f_k$  wie folgt zurückgewinnen:

- Inversion durch Reihenentwicklung (Polynomdivision).  
Nehmen wir an, dass  $F(z)$  durch die Gleichung

$$F(z) = \frac{1}{1 \pm a_0 z^{-1}}$$

gegeben sei.

Wir gewinnen die Rücktransformierte von  $F(z)$  durch:

$$F(z) = \frac{1}{1 \pm a_0 z^{-1}} = \frac{z}{z \pm a_0} = 1 \mp a_0 z^{-1} + (a_0)^2 z^{-2} \mp (a_0)^3 z^{-3} \dots$$

Den Wert von  $f_k$  finden wir als Koeffizient des Gliedes  $z^{-k}$ .

- Inversion durch Partialbruchzerlegung.  
Diese Methode wird durch folgendes Beispiel erleutert. Die Z-Transformierte der Schrittfunction

$$u_k = \begin{cases} 0, & \text{für } k < 0; \\ 1, & \text{für } k \geq 0. \end{cases}$$

ist

$$U(z) = \frac{1}{1 - z^{-1}}.$$

Üben wir diese Inputfunktion auf das System

$$H(z) = \frac{1}{1 + 0.8z^{-1}}$$

aus, so bekommen wir als Output

$$Y(z) = H(z)U(z) = \frac{z^2}{z^2 - 0.2z - 0.8} = z \left[ \frac{z}{(z-1)(z+0.8)} \right]$$

Der Ausdruck in den eckigen Klammern kann durch Partialbruchzerlegung in eine Summe von einfachen Brüchen zerlegt werden.

$$\frac{z}{(z-1)(z+0.8)} = \frac{A}{z-1} + \frac{B}{z+0.8}$$

Den Wert von  $A$  resp.  $B$  bekommt man wie folgt:

$$A = \left. \frac{z}{z+0.8} \right|_{z=1} = \frac{1}{1.8}$$

$$B = \frac{z}{z-1} \Big|_{z=-0.8} = \frac{1}{2.25}$$

$$\Rightarrow Y(z) = \frac{1}{1.8} \left( \frac{z}{z-1} \right) + \frac{1}{2.25} \left( \frac{z}{z+0.8} \right)$$

oder, anders geschrieben:

$$\Rightarrow Y(z) = \frac{1}{1.8} \left( \frac{1}{1-z^{-1}} \right) + \frac{1}{2.25} \left( \frac{1}{1+0.8z^{-1}} \right).$$

Die Rücktransformaten von  $\frac{1}{1-z^{-1}}$  und  $\frac{1}{1+0.8z^{-1}}$  sind leicht zu bestimmen (Reihenentwicklung). Daraus folgt:

$$y_k = \frac{1}{1.8} + \frac{1}{2.25} (-0.8)^k$$

Mit dieser Methode haben wir die Lösung  $y_k$  in geschlossener Form gefunden.

## Relation zwischen Z- und L-Transformation

Im Folgenden soll  $f^*(t)$  die der kontinuierlichen Funktion der Zeit  $f(t)$  entsprechende diskrete Zeitreihe sein:

$$f(t) \Rightarrow f^*(t) = f(kT) = f_k,$$

wobei  $T$  das Abtastintervall darstellt. Eine solche diskrete Zeitsequenz  $f^*(t)$  kann formal aus einer kontinuierlichen Zeitfunktion  $f(t)$  mittels einer amplitudenmodulierten Impulsfolge gebildet werden:

$$f^*(t) = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} f(t) \delta(t - kT).$$

Die obige Schreibweise wird oft in Mathematikbüchern angetroffen. Im Zusammenhang mit der digitalen Signalverarbeitung wird auch folgende Form verwendet:

$$f(t) \Rightarrow f^*(t) = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} f(kT) \delta(t - kT).$$

Die Laplace-Transformation von einer kontinuierlichen Funktion  $f(t)$  wird bekanntlich wie folgt definiert:

$$F(s) = \int_0^{\infty} f(t) e^{-st} dt.$$

Uns interessiert aber jetzt nicht die Laplace Transformation der kontinuierlichen Funktion sondern die Laplace-Transformation  $F^*(s)$  der diskreten

Folge  $f^*(t)$ . Dazu wenden wir einfach die Definition der Laplace Transformation auf unsere formale definition von  $f^*(t)$  an:

$$F^*(s) = \int_0^{\infty} \sum f(kT) \delta(t - kT) e^{-st} dt,$$

oder nach vertauschen der Reihenfolge von Integration und Summation,

$$F^*(s) = \sum f(kT) \int_0^{\infty} \delta(t - kT) e^{-st} dt.$$

Unter Berücksichtigung des Verschiebungssatzes der Laplace Transformation und der Tatsache, dass  $\mathcal{L}\{\delta(t)\} = 1$ , gilt nun

$$\int_0^{\infty} \delta(t - kT) e^{-st} dt = \mathcal{L}\{\delta(t - kT)\} = e^{-skT}.$$

Also ist die Laplace Transformierte der diskreten Folge  $f^*(t)$

$$F^*(s) = \sum f(kT) e^{-skT}.$$

Die Z-Transformierte der diskreten Folge  $f^*(t)$  erhalten wir einfach aus der Definition der Z-Transformation und ist

$$F(z) = Z[f(kT)] = \sum f(kT) z^{-k}.$$

Aus dem Vergleich von  $F^*(s)$  mit  $F(z)$  und unter Berücksichtigung dass

$$F^*(s) = \sum f(kT) [e^{sT}]^{-k}$$

folgt

$$F(z) = F^*(s) \Big|_{e^{sT}=z}.$$

Mit anderen Worten, aus der Z-Transformierten  $F(z)$  erhalten wir die L-Transformierte der diskreten Zahlenfolge  $f^*(t)$  mit der Substitution

$$z = e^{sT}.$$

Dieser Sachverhalt ist von entscheidender Bedeutung für die Herleitung gewisser Methoden zur Realisierung von digitalen Filtern.

### **Wichtig:**

Zur Vermeidung von Missverständnissen ist es sehr wichtig zu beachten, dass die L-Transformierte  $F(s)$  einer kontinuierlichen Funktion  $f(t)$  und die L-Transformierte  $F^*(s)$  der mit Abtastintervall  $T$  diskretisierten Folge  $f^*(t)$  nicht identisch sind:

$$F^*(s) \neq F(s).$$



Tatsächlich besteht zwischen  $F^*(s)$  und  $F(s)$  eine Beziehung der Form (ohne Beweis)

$$F^*(s) = \frac{1}{T} \sum_n F\left(s + jn \frac{2\pi}{T}\right).$$

Mit  $\omega_s = 2\pi f_s = 2\pi/T$  bedeutet dies, dass  $F^*(s)$  mit der Abtastrate  $f_s$  periodisch ist. Diese Eigenschaft ist die gleiche wie die Periodizität der Diskreten Fourier Transformation!

**Bemerkung:**

An dieser Stelle noch Folgendes: Viele Autoren ziehen es vor, die Diskretisierung  $f^*$  in der Form

$$f^*(t) = T \sum_{k=-\infty}^{+\infty} f(kT) \delta(t - kT)$$

zu schreiben. Der Faktor  $T$  rührt vom Wunsch her,  $f(t)$  durch  $f^*(t)$  so zu approximieren, dass die Fläche unter der Funktion im Zeitintervall  $kT \leq \xi < (k+1)T$  gleich bleibt. Mit der obigen Definition gilt:

$$\lim_{T \rightarrow 0} T f(kT) = f(t)$$

und

$$F^*(s) = \sum_n F(s + jn\omega_s).$$

## Beispiel:

### Diskrete Darstellung des Seismometers

Zur Veranschaulichung der Anwendungen der Z-Transformation, wollen wir uns fragen, wie man das Seismometer als diskretes lineares zeitinvariantes System modellieren kann. Dazu betrachten wir noch einmal die Differentialgleichung des Seismometers:

$$\ddot{y} + 2\xi\omega_0\dot{y} + \omega_0^2y = -\ddot{x}$$

Die Eingangsgrösse ist die Bodenverschiebung  $x(t)$ , die hier als zweimalige Ableitung erscheint und das Ausgangssignal des Seismometers sei die relative Auslenkung der Masse  $y(t)$ . Die kontinuierliche Übertragungsfunktion

$$H(s) = \frac{Y(s)}{X(s)}$$

erhält man aus der Laplace Transformation dieser Differentialgleichung:

$$H(s) = \frac{-s^2}{s^2 + 2\xi\omega_0s + \omega_0^2}$$

Sie ist identisch mit der im Kapitel **Seismometer** hergeleiteten Übertragungsfunktion.

Ein mögliches Vorgehen, eine diskrete Übertragungsfunktion zu erhalten, erfolgt durch Umwandlung der Differentialgleichung in eine sogenannte *Differenzgleichung*. Dabei ersetzen wir die Ableitungen durch die üblichen Differenzenquotienten, wobei hier das Abtastintervall mit  $T$  bezeichnet ist:

$$\dot{y}(t) = \left. \frac{dy}{dt} \right|_{t=kT} \approx \frac{y_k - y_{k-1}}{T}$$

$$\ddot{y}(t) = \left. \frac{d^2y}{dt^2} \right|_{t=kT} \approx \frac{y_k - 2y_{k-1} + y_{k-2}}{T^2}$$

Das Gleiche gilt auch für die Bodenbeschleunigung  $\ddot{x}$ . Durch Einsetzen dieser Approximationen in die Differentialgleichung erhält man die gesuchte Differenzgleichung

$$\frac{y_k - 2y_{k-1} + y_{k-2}}{T^2} + 2\xi\omega_0 \frac{y_k - y_{k-1}}{T} + \omega_0^2 y_k = \frac{-x_k + 2x_{k-1} - x_{k-2}}{T^2}$$

die ohne weiteres nach  $y_k$  aufgelöst werden kann:

$$(1 + 2\xi\omega_0 T + \omega_0^2 T^2)y_k + (-2\xi\omega_0 T - 2)y_{k-1} + y_{k-2} = -x_k + 2x_{k-1} - x_{k-2}$$

und

$$y_k = a_0 x_k + a_1 x_{k-1} + a_2 x_{k-2} - b_1 y_{k-1} - b_2 y_{k-2},$$

mit

$$\begin{aligned}a_0 &= -\frac{1}{1 + 2\xi\omega_0 T + \omega_0^2 T^2}, \\a_1 &= \frac{2}{1 + 2\xi\omega_0 T + \omega_0^2 T^2}, \\a_2 &= -\frac{1}{1 + 2\xi\omega_0 T + \omega_0^2 T^2}, \\b_1 &= \frac{-2\xi\omega_0 T - 2}{1 + 2\xi\omega_0 T + \omega_0^2 T^2}, \\b_2 &= \frac{1}{1 + 2\xi\omega_0 T + \omega_0^2 T^2}.\end{aligned}$$

Wir führen nun die Z-Transformation der Gleichung für  $y_k$  aus:

$$Z[y_k] = a_0 Z[x_k] + a_1 Z[x_{k-1}] + a_2 Z[x_{k-2}] - b_1 Z[y_{k-1}] - b_2 Z[y_{k-2}].$$

Unter Anwendung des Verschiebungssatzes der Z-Transformation wird dies zu

$$Y(z) = a_0 X(z) + a_1 z^{-1} X(z) + a_2 z^{-2} X(z) - b_1 z^{-1} Y(z) - b_2 z^{-2} Y(z).$$

Entsprechend dem Vorgehen im Kontinuum ist im Diskreten die Uebertragungsfunktion einfach das Verhältnis zwischen der Z-Transformation des Ausgangs und der Z-Transformation des Eingangs. Folglich erhalten wir mit

$$H(z) = \frac{Y(z)}{X(z)}$$

die diskrete Uebertragungsfunktion für die Massenauslenkung des Seismometers als Folge einer Bodenverschiebung am Eingang:

$$H(z) = \frac{a_0 + a_1 z^{-1} + a_2 z^{-2}}{1 + b_1 z^{-1} + b_2 z^{-2}}.$$

Es sei aber darauf hingewiesen, dass diese Lösung nur eine von vielen möglichen Realisierungen eines diskreten Modells des Seismometers ist. So hätten wir auch die Differentialgleichung mit zentralen Differenzen statt mit einfachen Differenzen approximieren können, und hätten somit eine andere Form der diskreten Uebertragungsfunktion erhalten. Weitere Methoden wie die Methode der Impulsinvarianz oder der bilinearen Transformation kommen im Zusammenhang mit der diskreten Realisierung von Filtern zur Sprache.

# Kapitel 5

## Digitale Filter

### Einleitung

Mit *Filter* wird ein physikalisches System bezeichnet, das aus einer Funktion  $u(t)$  eine neue Funktion  $y(t)$  erzeugt. Dieser Begriff wurde im Zusammenhang mit der Signalverarbeitung vor einigen Jahrzehnten in der Elektrotechnik eingeführt.

Nach dieser Definition besitzen alle physikalische Systeme eine *Filterwirkung*. Wir können zum Beispiel ein Seismograph als ein Filter betrachten. Der Seismograph wandelt nämlich die Bodenbewegungen  $u(t)$  in ein Seismogramm  $y(t)$  um.

Der Name erinnert an die Veränderungen, welche ein elektrisches Signal  $u(t)$  in seinen spektralen Eigenschaften erfährt, wenn es von einem mit Widerständen, Induktionsspulen und Kondensatoren hergestellten elektrischen Netzwerk modifiziert wird. Von der Struktur her gesehen, können wir ein Filter mit einer Differentialgleichung (kontinuierliche Signale) oder einer Differenzgleichung (diskrete Signale) identifizieren. Bei den *Analogfiltern* benutzt man solche physikalische Systeme um gewünschte Verhalten zu simulieren. *Digitalfilter* führen dieses Verhalten numerisch durch.

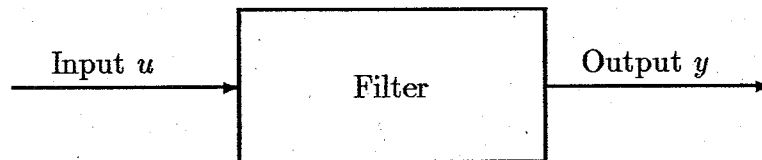
Die moderne Auffassung der Filtertheorie (*Estimationstheorie*) stützt sich auf Arbeiten, die A. N. Kolmogoroff<sup>1</sup> und N. Wiener<sup>2</sup> in den vierziger Jahren durchgeführt haben. Sie betrachteten statistisch stationäre Prozesse, unendlich lange Beobachtungsintervalle und zeitinvariante Strukturen. Die Aufgabe bestand auf Grund von Beobachtungen Signale abzuschätzen, unter ausdrücklicher Einbeziehung stochastischer Störgrößen und Messfehler. Das Gütekriterium bestand aus dem mittleren Fehlerquadrat. Gesucht wurde die Gewichtsfunktion des Filters die das Kriterium möglichst klein macht.

---

<sup>1</sup>Kolmogoroff, A. N.: Interpolation und Extrapolation von stationären zufälligen Folgen. Bulletin der Akademie der Wissenschaften der UdSSR, Math. Serie, Bd.5 (1941).

<sup>2</sup>Wiener, N.: Extrapolation, Interpolation and Smoothing of Stationary Time Series. Wiley, New York (1949).

Bei kontinuierlicher Zeit ergab sich als notwendige und hinreichende Bedingung für die Gewichtsfunktionen die berühmt gewordene Wiener-Hopf Integralgleichung. In diskreter Zeit existiert eine entsprechende Gleichung für die optimalen Koeffizienten mit den die beobachtete Sequenz gewichtet werden muss. Schon bald versuchte man, die ziemlich einschränkenden Voraussetzungen der von Wiener und Kolmogoroff entwickelten Theorie aufzuheben um den Anwendungsbereich zu erweitern. Der Durchbruch gelang R. E. Kalman<sup>3</sup> in den sechziger Jahren. Er verband seine im Zustandsraum formulierte Theorie der Beobachtung linearer Systeme mit dem Konzept der orthogonalen Projektionen von Zufallsvariablen. Dieses Ergebnis, das auf instationäre Vektorprozesse in diskreter Zeit, zeitvariable Filter und beliebige Beobachtungsdauer zutrifft, wurde wegen seiner Allgemeingültigkeit und mathematischen Eleganz beachtet. In diesem Kapitel werden wir uns auf die ursprüngliche Definition vom Filterbegriff beziehen.



Wie obiges Schema zeigt, kann ein Filter als ein System aufgefasst werden, bei welchem die Eingabe z.Bsp. einer Spannung  $u$  (Input), eine Ausgangsspannung  $y$  (Output) bewirkt.

## Beispiel:

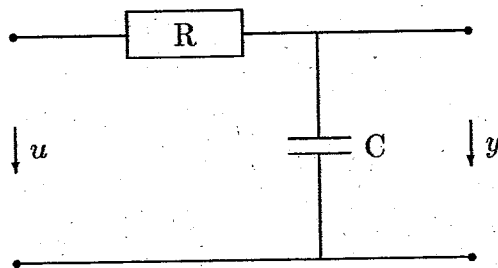
### RC-Filter

Betrachten wir das elektrische Schema aus Figur 5.1 Der Zusammenhang zwischen den Spannungen  $u(t)$  und  $y(t)$  wird durch die Differentialgleichung

$$RC \frac{dy}{dt} + y = u$$

gegeben. Da das RC-Filter durch eine lineare Differentialgleichung mit konstanten Koeffizienten beschrieben werden kann, handelt es sich um ein lineares und zeitinvariantes System.

<sup>3</sup>Kalman, R. E.: A new approach to linear filtering and prediction problems. Trans ASME, Ser. D, J. Basic Eng., Vol. 82 (1962).



Figur 5.1: RC-Filter

### Analytische Lösung der Differentialgleichung

Die Differentialgleichung des RC-Filters lässt sich mit elementaren Methoden der Theorie der Differentialgleichungen einfach lösen. Gesucht ist eine Beziehung für  $y(t)$  als Funktion von  $u(t)$ . Eine alternative Methode, welche in diesem Zusammenhang besonders Zweckmässig ist, beruht auf der Laplace Transformation.

Seien  $Y(s)$  und  $U(s)$  die Laplace-Transformierten von  $y(t)$  und  $u(t)$ , dann lautet die Laplace Transformation der Differentialgleichung des RC-Filters:

$$RC[sY(s) - y(0)] + Y(s) = U(s).$$

Mit der Annahme der Anfangsbedingung  $y(0) = 0$  folgt

$$Y(s)(RCs + 1) = U(s).$$

Die Uebertragungsfunktion  $H(s)$  eines Systems ist allgemein definiert als das Verhältnis zwischen den Laplace-Transformierten des Ausganges und des Einganges. Die Uebertragungsfunktion des RC-Filters ist somit

$$H(s) = \frac{Y(s)}{U(s)} = \frac{1}{RCs + 1} = \frac{\frac{1}{RC}}{s + \frac{1}{RC}}.$$

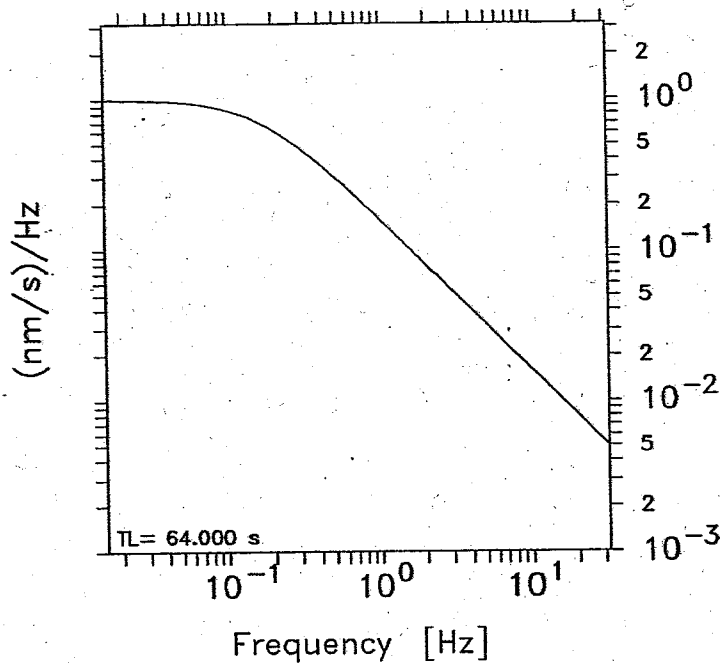
Sie besitzt einen einzigen Pol an der Stelle  $s_p = -1/RC$  und keine Nullstellen.

Den Frequenzgang erhält man indem man in der Uebertragungsfunktion die komplexe Variable  $s$  durch die imaginäre Variable  $j\omega$  ersetzt. Mit  $\omega_0 = 1/RC$  lautet also der Frequenzgang des RC-Filters

$$H(j\omega) = \frac{\omega_0}{\omega_0 + j\omega} = \frac{1}{1 + j\frac{\omega}{\omega_0}}.$$

Das Betragsquadrat des Frequenzganges des RC-Filters hat die Form

$$|H(\omega)|^2 = \frac{1}{1 + (\frac{\omega}{\omega_0})^2}.$$



Figur 5.2: Betrag des Frequenzganges (Amplitudenspektrum) des RC-Filters mit einer Grenzfrequenz von 0.16 Hz ( $RC = 1$ ).

Für  $\omega = 0$ ,  $\omega = \omega_0$  und  $\omega = \infty$  ergeben sich für  $|H(\omega)|^2$  die Werte 1, 1/2 und 0. Das RC-Filter entspricht einem Tiefpassfilter mit der Grenzfrequenz  $f_0 = \omega_0/(2\pi)$ . Der Verlauf des Amplitudenspektrums (Betrag des Frequenzganges) eines RC-Filters mit einer Grenzfrequenz von 0.16 Hz ( $RC = 1$ ) ist in Abbildung 5.2 dargestellt.

Die Impulsantwort eines Systems erhält man ganz allgemein durch rücktransformieren der Übertragungsfunktion. Ein Blick in die Korrespondenztabelle der Laplace Transformation ergibt somit für die Impulsantwort des RC-Filters

$$h(t) = \frac{1}{RC} e^{-\frac{t}{RC}}.$$

Ein  $\delta$ -Impuls zur Zeit  $t = 0$  am Eingang bewirkt also eine exponentiell abfallende Spannung am Ausgang. Die Zeit  $\tau = RC$ , in der die Spannung auf  $1/e$  des Anfangswertes gesunken ist, bezeichnet man als die Zeitkonstante des Filters, und es gilt natürlich  $\tau = 1/(2\pi f_0)$ .

Durch umstellen der allgemeinen Gleichung für die Übertragungsfunktion erhält man

$$Y(s) = H(s)U(s).$$

Die Laplace-Transformierte des Ausgangs eines linearen Systems als Folge eines beliebigen Einganges ist also einfach das Produkt der Übertragungsfunktion mit der Laplace-Transformierten des Einganges. Die entsprechende Lösung für  $y(t)$  erhält man dann durch rücktransformieren von  $Y(s)$ .

Betrachten wir zum Beispiel eine Schrittfunktion als Eingangssignal

(Heaviside-Funktion):

$$u(t) = \begin{cases} 0, & \text{für } t < 0; \\ 1, & \text{für } t \geq 0. \end{cases}$$

Die Laplace Transformation der Schrittfunktion ist  $U(s) = 1/s$  (das folgt auch unter Anwendung der Integrationsregel für die Laplace Transformation und aus der Einsicht, dass die Schrittfunktion das Integral der  $\delta$ -Funktion ist). Somit ist in diesem Fall

$$Y(s) = \frac{1}{s} \cdot \frac{\frac{1}{RC}}{s + \frac{1}{RC}} = \frac{1}{s} - \frac{1}{s + \frac{1}{RC}},$$

wobei der letzte Ausdruck durch Partialbruchzerlegung gewonnen wurde. Aus den Korrespondenztabelle der Laplace Transformation erhalten wir dann den Ausgang unseres Filters als Funktion der Zeit (in diesem Fall die Schrittantwort des Systems):

$$y(t) = 1 - e^{-\frac{t}{RC}}.$$

Das genau gleiche Resultat bekommen wir auch wenn wir im Zeitbereich die Impulsantwort des RC-Filters  $h(t)$  mit der Schrittfunktion  $u(t)$  falten:

$$y(t) = h(t) * u(t) = \int_{-\infty}^{\infty} h(\tau)u(t-\tau)d\tau = \int_0^t \frac{1}{RC}e^{-\frac{\tau}{RC}} \cdot 1 d\tau = 1 - e^{-\frac{t}{RC}}.$$

Wir sehen, dass die Faltung in diesem Fall nichts anderes ist als das Integral der Impulsantwort: Dies folgt wiederum aus der Tatsache, dass die Schrittfunktion das Integral der  $\delta$ -Funktion ist. Für den Fall  $RC = 1$  hat die Schrittantwort des RC-Filters den durch die durchgezogene Kurve in Abbildung 5.3 gezeigten Verlauf. Wegen der Tiefpass-Wirkung des Filters, erhält die scharfe Ecke der Schrittfunktion bei  $t = 0$  einen geglätteten Verlauf.

### Numerische Lösung der Differentialgleichung

Um eine Diskretisierung einer Differentialgleichung mit der Schrittweite  $T$  vorzunehmen, approximieren wir die Ableitung von  $y(t)$  zur Zeit  $kT$  durch

$$\frac{dy}{dt} \Big|_{t=kT} \approx \frac{y_k - y_{k-1}}{T}$$

Setzt man diese Approximation in die Differentialgleichung des RC-Filters ein, dann erhalten wir

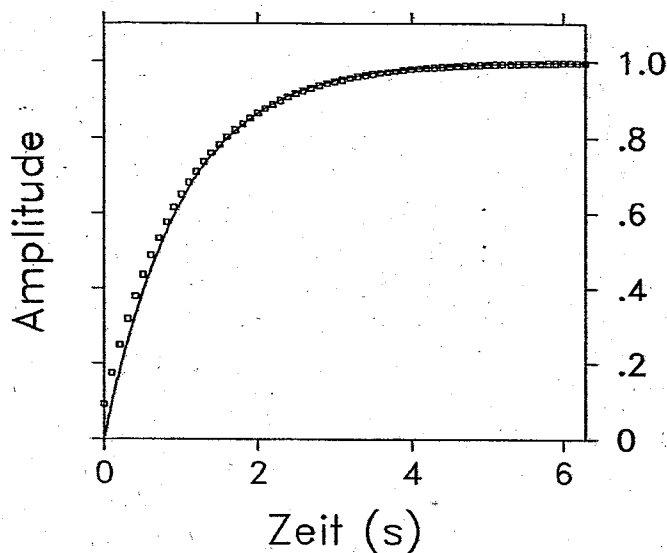
$$RC \frac{y_k - y_{k-1}}{T} + y_k = u_k.$$

Diese Gleichung kann nun problemlos nach den gesuchten  $y_k$  aufgelöst werden. Die Lösung hat die Form

$$y_k = a_0 u_k - b_1 y_{k-1},$$



## RC-Filter: Schrittantwort



Figur 5.3: Ausgang  $y$  eines RC-Filters (Input: Schrittfunktion)

mit

$$a_0 = \frac{1}{1 + \frac{RC}{T}}$$

und

$$b_1 = \frac{-1}{1 + \frac{T}{RC}}$$

**Beispiel:** Mit  $RC = 1$  und  $T = 0.1$ , sowie mit der Anfangsbedingung  $y_{-1} = 0$  und mit der Schrittfunktion  $u_k = 1$  als Input ergeben sich bei der obigen Approximation die Werte von  $y_k$  für  $k = 1, 2, 3, \dots$  wie sie in Figur 5.3 durch die diskreten Punkte dargestellt sind.

Die Gleichung

$$y_k = a_0 u_k - b_1 y_{k-1}$$

stellt die Lösung der Differenzgleichung für das RC-Filter dar, wobei die Werte der Koeffizienten  $a_0$  und  $b_1$  aus den Spezifikationen der entsprechenden elektronischen Bauteilen bzw. aus den gewünschten Eigenschaften des Filters folgen. In diesem Fall ist der Ausgang  $y_k$  unseres Filters zum diskreten Zeitpunkt  $t = kT$  eine Linearkombination des Eingangs  $u_k$  zum gleichen Zeitpunkt  $t = kT$  mit dem Ausgang  $y_{k-1}$  zum früheren Zeitpunkt  $t = (k-1)T$ . Eine Beziehung dieser Art, in der der Wert des Ausganges zu einem bestimmten Zeitpunkt als Funktion des Ausganges zu einer früheren Zeit gegeben ist, nennt man *rekursiv*.

Die Z-Transformation obiger Gleichung lautet:

$$Z[y_k] = a_0 Z[u_k] - b_1 Z[y_{k-1}],$$

oder anders geschrieben und unter Ausnützung der Verschiebungseigenschaft der Z-Transformation:

$$Y(z) = a_0 U(z) - b_1 z^{-1} Y(z).$$

Nach umstellen erhalten wir:

$$H(z) = \frac{Y(z)}{U(z)} = \frac{a_0}{1 + b_1 z^{-1}}.$$

Ganz analog zur Lösung der Differentialgleichung des RC-Filters mittels Laplace Transformation entspricht nun obige Gleichung der Uebertragungsfunktion  $H(z)$  unseres diskreten Filters, nämlich dem Verhältnis zwischen der Z-Transformierten  $Y(z)$  des Ausgangs und der Z-Transformierten  $U(z)$  des entsprechenden (beliebigen) Einganges.

## Butterworth Filter

In der Praxis gibt es unzählige frequenzselektive Filter mit unterschiedlichen Eigenschaften, die je nach Anwendung ihre Vor- und Nachteile aufweisen. Eines der beliebtesten Filter ist das Butterworth Filter. Es hat die Eigenschaft, dass die Uebertragungsfunktion (bzw. der Frequenzgang) im Durchlassbereich maximal flach ist. Dafür ist die Unterdrückung im Stopbereich weniger stark als bei einigen anderen Filtern gleicher Ordnung. Auch die Phasendrehung der kausalen Ausführung kann unter Umständen störend sein.

Das Betragsquadrat des Frequenzganges eines Butterworth Filters n-ter Ordnung hat die Form

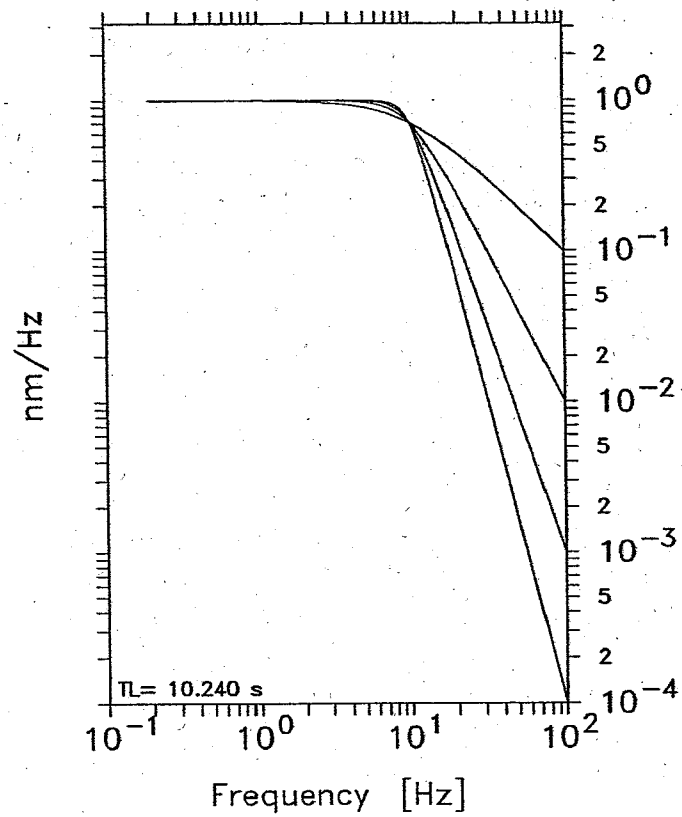
$$|H_n(w)|^2 = \frac{1}{1 + w^{2n}}.$$

Hier bezeichnet  $w$  die normierte Frequenz: Für ein Tiefpassfilter ist  $w = j\omega/j\omega_0$  und für ein Hochpassfilter ist  $w = -j\omega_0/j\omega$ , wobei  $\omega_0 = 2\pi f_0$  die Grenz- oder Eckfrequenz des Filters ist.

Wie sofort ersichtlich ist, hat das Betragsquadrat des Frequenzganges,  $|H_n|^2$  sowohl des Tiefpass- als auch des Hochpassfilters an der Stelle  $\omega = \omega_0$  den Wert  $1/2$  für alle Ordnungen  $n$ . Ein Vergleich mit der Uebertragungsfunktion des RC-Filters zeigt, dass das RC-Filter ein Butterworth Tiefpassfilter erster Ordnung ist. Für den Betrag des Frequenzganges (Amplitudenspektrum) gilt also

$$|H_n(\omega = \omega_0)| = \frac{1}{\sqrt{2}} = 0.707 = -3\text{db}.$$

Ein Filter wird daher durch die Frequenz  $\omega_0$  charakterisiert, bei der die Amplitude des Frequenzganges 3 db unter dem Wert im Durchlassbereich liegt ( $20 \log 0.707 = -3$ ).



Figur 5.4: Betrag des Frequenzganges (Amplitudenspektrum) von Butterworth Tiefpassfiltern verschiedener Ordnung.

In einer logarithmischen Darstellung ist die Amplitude des Frequenzganges im Stopbereich für ein Tiefpassfilter ( $\omega > \omega_0$ ) proportional zu  $-n$  und für ein Hochpassfilter ( $\omega < \omega_0$ ) proportional zu  $n$ . Wie in Abbildung 5.4 dargestellt, bestimmt somit die Ordnung  $n$  des Filters die Schärfe mit der die zu unterdrückenden Frequenzen abgeschnitten werden. Filter höherer Ordnung benötigen aber eine grössere Anzahl Koeffizienten zu ihrer Realisierung und erfordern somit auch einen grösseren Rechenaufwand bei der Anwendung. Ausserdem kann sich unter Umständen die längere Impulsantwort von Filtern höherer Ordnung nachteilig auf die Form des Ausgangssignals auswirken.

## Allgemeine Eigenschaften digitaler Filter

Wir beschränken uns in diesem Abschnitt auf zeitdiskrete lineare Filter, d.h. auf Filter, die auf diskrete Zeitserien angewendet werden und linear sind. Ausserdem sollen sie verschiebungsinvariant (= zeitinvariant) sein. Letzteres bedeutet, dass sie durch eine Differenzgleichung mit konstanten Koeffizienten beschrieben werden können (was im Kontinuierlichen einer Differentialgleichung mit konstanten Koeffizienten entspricht).

Wir wollen nun die Resultate aus der Diskretisierung des RC-Filters und des Seismometers verallgemeinern. Nehmen wir an, dass zu einer Inputsequenz  $u_k$  mit der Z-transformierten  $U(z)$  der Output  $y_k$  (resp.  $Y(z)$ ) gehöre. Die allgemeinste Übertragungsfunktion  $H(z)$  kann geschrieben werden in der Form:

$$H(z) = \frac{Y(z)}{U(z)} = \frac{\sum_{n=0}^N a_n z^{-n}}{1 + \sum_{m=1}^M b_m z^{-m}}$$

oder, anders geschrieben:

$$Y(z) = \sum_{n=0}^N a_n z^{-n} U(z) - \sum_{m=1}^M b_m z^{-m} Y(z)$$

Ein Vergleich zeigt nun, dass in Fall des RC-Filters  $N = 0$  und  $M = 1$  und im Fall des Seismometers  $N = 2$  und  $M = 2$  sind.

Die Ausführung der inversen Transformation führt zu

$$y_k = \sum_{n=0}^N a_n u_{k-n} - \sum_{m=1}^M b_m y_{k-m}$$

Diese Formel heisst die "direkte Form" des Filters (sie kann natürlich auch direkt durch umstellen der entsprechenden Differenzgleichung gewonnen werden).

Zu beachten sind folgende Punkte:

- Die obige Form der Differenzgleichung stellt einem Algorithmus dar, der  $y_k$  direkt realisiert.
- Die Konstanten  $a_n$ ,  $n = 0, \dots, N$  und  $b_m$ ,  $m = 1, \dots, M$  der direkten Form sind die gleichen wie diejenigen der Übertragungsfunktion.
- Die direkte Form benötigt die Anfangswerte  $y_k$ ,  $k = -M, \dots, -1$ ; In der Praxis werden diese Anfangswerte meistens als gleich 0 angenommen.

## MA- und AR-Filter

Im Zusammenhang mit deren Realisierung werden die Filter in

1. nichtrekursive Filter
2. rekursive Filter

klassifiziert.

### Nichtrekursive Filter (MA = FIR)

Ein Filter heisst *nichtrekursiv* falls in der allgemeinen Form der Differenzgleichung  $b_m = 0$ , für  $m = 1 \dots M$  ist, d.h. falls der Output  $y_k$  nur eine lineare Kombination vom letzten und früheren Werten des Inputsignals  $u_i$ , für  $i = k \dots k - N$  ist. Nichtrekursive Filter werden in der Literatur auch *transversale*, *moving average* (MA) oder *finite-duration impulse response* (FIR) Filter genannt. Finite impulse response stützt sich auf die Eigenschaft, dass der Output zur Zeit  $k$  keine Information mehr von Inputsignalen zu früher Zeiten als  $k - N$  enthält. Es bedeutet auch, wie der Name sagt, dass die Impulsantwort mit einer endlichen Anzahl von Werten vollständig und exakt dargestellt wird.

Die Übertragungsfunktion des nichtrekursiven Filters ist also:

$$H(z) = \sum_{n=0}^N a_n z^{-n}.$$

Die entsprechende Differenzgleichung ist:

$$y_k = \sum_{n=0}^N a_n u_{k-n}.$$

Die  $a_n$  stellen die Impulsantwort des nichtrekursiven Filters dar. Die Überprüfung ist sehr leicht. Es genügt die Inputfunktion  $u_k$  wie folgt zu definieren

$$u_k = \delta_k = \begin{cases} 1, & \text{für } k = 0; \\ 0, & \text{für } k \neq 0. \end{cases}$$

Es folgt dann die diskrete Impulsantwort:

$$y_k = h_k = \sum_{n=0}^N a_n \delta_{k-n}$$

wobei

$$\delta_{k-n} = \begin{cases} 1, & \text{für } k = n; \\ 0, & \text{für } k \neq n. \end{cases}$$

also

$$\Rightarrow h_k = a_k$$

und somit die diskrete Übertragungsfunktion

$$H(z) = \sum_{n=0}^N a_n z^{-n} = \sum_{n=0}^N h(n) z^{-n}.$$

**Beachte:** die oben aufgeführte Differenzgleichung für das MA-Filter stellt nichts anderes dar als die diskrete Faltung der Impulsantwort  $a_k$  des Filters mit dem Eingangssignal  $u_k$ :

$$y_k = \sum_{n=0}^N a_n u_{k-n} = a_k * u_k.$$

Ein einfaches und typisches Beispiel eines nichtrekursiven Filters ist der Glättungsoperator, der einen gleitenden Mittelwert über drei benachbarte Abtastwerte berechnet:

$$y_k = \frac{u_k + u_{k-1} + u_{k-2}}{3} = \frac{1}{3}u_k + \frac{1}{3}u_{k-1} + \frac{1}{3}u_{k-2}.$$

Hier ist die Impulsantwort die Zahlenfolge

$$h_k = \{h_0, h_1, h_2\} = \{1/3, 1/3, 1/3\},$$

dann können wir obige Rechenvorschrift auch wie folgt ausdrücken:

$$y_k = h_0 u_k + h_1 u_{k-1} + h_2 u_{k-2} = \sum_{n=0}^2 h_n u_{k-n}.$$

Obwohl *moving average* gleichbedeutend mit *gleitender Mittelwert* ist und der Glättungsoperator einem Tiefpassfilter entspricht, kann jedes Filter (Hochpass, Bandpass, etc.) als MA-Filter realisiert werden: Die Wirkung hängt lediglich von der Anzahl und den Werten der Koeffizienten  $a_n$  des Filters ab.

## Rekursive Filter (AR = IIR)

Bei den *rekursiven* Filtern hängt der Output  $y(k)$  sowohl vom Input-Signal als auch von früheren Werten des Output-Signals ab (feed-back paths). Rekursive Filter werden auch *auto regressive* (AR) oder *infinite-duration impulse response* (IIR) Filter genannt. Letzteres heisst, dass die vollständige Impulsantwort im Prinzip unendlich lang ist (Bsp. RC-Filter, Butterworth-Filter, Seismometer).

Die rekursive Filterübertragungsfunktion ist:

$$H(z) = \frac{Y(z)}{U(z)} = \frac{\sum_{n=0}^N a_n z^{-n}}{1 + \sum_{m=1}^M b_m z^{-m}}$$

wobei mindestens ein  $b_m$  verschieden von Null sein muss. Streng genommen ist der Zähler eines reinen AR-Filters eine Konstante ( $a_0$ , z.Bsp. das RC-Filter). Die oben angegebene Gleichung beschreibt den allgemeineren Fall eines ARMA-Filters, der als Quotient eines MA- und eines AR-Filters dargestellt wird.

Dass die Impulsantwort eines AR-Filters im Allgemeinen unendlich lang ist, lässt sich leicht zeigen. Sei die diskrete Übertragungsfunktion gegeben als

$$H(z) = \frac{a_0}{1 + b_1 z^{-1} + b_2 z^{-2} + \dots + b_M z^{-M}}$$

Die diskrete Impulsantwort  $h(k)$  ist die inverse Z-Transformierte von  $H(z)$ , die man durch Polynomdivision von  $H(z)$  erhält: Aus der Definition der Z-Transformation folgt, dass die diskreten Werte  $h_k$  einfach die Koeffizienten der unendlich langen Potenzreihe sind, die aus der Polynomdivision resultiert.

**Beachte:** In der Praxis weichen die Beträge der Impulsantwort von stabilen IIR-Filtern nach einer endlichen Anzahl Abtastwerte nur noch wenig von 0 ab. Somit lässt sich die theoretisch unendlich lange Impulsantwort oft durch eine beschränkte Zahlenfolge approximieren, welche dann als MA-Filter betrachtet werden kann. Vom Rechenaufwand aber gesehen ist ein rekursives Filter wesentlich günstiger als ein nicht-rekursives Filter mit den gleichen Eigenschaften.

## Frequenzselektive Filter

Die Interpretation eines Filters als eine frequenzselektive Funktion ist oft von besonderem Interesse. Es sei die Differenzgleichung

$$y_k + b_1 y_{k-1} + \dots + b_M y_{k-M} = a_0 u_k + a_1 u_{k-1} + \dots + a_N u_{k-N}$$

gegeben. Wir suchen nun eine Funktion der Form  $H(\omega) = F(e^{j\omega T})$ , welche das Verhalten unseres Filters als Funktion der Frequenz beschreibt (Frequenzgang oder Frequenzantwort).

Wählen wir als Inputfunktion eine harmonische Schwingung der Frequenz  $\omega$

$$u_k = e^{jk\omega T}$$

Wir können den Output  $y_k$  für eine gegebene Frequenz  $\omega$ , dank der Linearität, wie folgt darstellen

$$y_k = F(e^{j\omega T})e^{jk\omega T}$$

Durch Einsetzen von  $u_k$  und  $y_k$  in die Differenzgleichung erhalten wir für  $F(e^{j\omega T})$

$$e^{jk\omega T} F(e^{j\omega T})(1 + b_1 e^{-j\omega T} + \dots + b_M e^{-jM\omega T}) = e^{jk\omega T}(a_0 + \dots + a_N e^{-jN\omega T})$$

$$F(e^{j\omega T}) = \frac{a_0 + \dots + a_N e^{-jN\omega T}}{1 + b_1 e^{-j\omega T} + \dots + b_M e^{-jM\omega T}}$$

$$F(e^{j\omega T}) = \frac{\sum_{n=0}^N a_n e^{-jn\omega T}}{1 + \sum_{m=1}^M b_m e^{-jm\omega T}}$$

Der Vergleich mit der Z-transformierten

$$H(z) = \frac{\sum_{n=0}^N a_n z^{-n}}{1 + \sum_{m=1}^M b_m z^{-m}}$$

liefert:

$$F(e^{j\omega T}) = H(z)|_{z=e^{j\omega T}} = H(e^{j\omega T}) \equiv H(\omega)$$

In Worten, die Frequenzantwort (Frequenzgang)  $H(\omega)$  eines zeitdiskreten Filters wird durch den Wert der Z-transformierten  $H(z)$  auf dem Einheitskreis  $|z| = |e^{j\omega T}| = 1$  in der komplexen z-Ebene bestimmt.

Man beachte aber, *der soeben hergeleitete Frequenzgang des zeitdiskreten Filters ist nicht identisch mit dem kontinuierlichen Frequenzgang, den man aus der analytischen Lösung der Differentialgleichung erhält.*

## Realisierung digitaler Filter

Das Problem besteht darin, für ein vorgegebenes Filterverhalten die Koeffizienten  $a_n$  und  $b_n$  zu bestimmen.

Dazu gibt es im wesentlichen zwei Wege:

1. Man kann die durch Vorgabe der Spezifikationen gestellte Aufgabe, ein digitales Filter zu entwerfen, in die Aufgabe transformieren, zunächst ein kontinuierliches Filter zu berechnen. Das gesuchte digitale System erhält man dann durch Transformation der im kontinuierlichen Bereich gefundenen Lösung. Bei diesem Verfahren lassen sich bekannte Lösungsmethoden des Kontinuums unmittelbar anwenden. (indirekter Weg).



2. Man kann ausschliesslich im diskreten Bereich arbeiten, indem man die Koeffizienten  $a_n$ ,  $b_m$  direkt aus den spezifizierten Eigenschaften ableitet (direkter Weg).

Sehr oft werden in der Geophysik Vorschriften im Frequenzbereich gestellt, bzw. die zunächst im Zeitbereich gestellten Forderungen werden in solche im Frequenzbereich überführt. Es liegt nahe, die hier vorliegenden umfangreichen Erfahrungen der Analogtechnik zu verwenden. Allein aus diesem Grund ist der erste Lösungsweg sicher berechtigt.

Der zweite Weg wird in der *Estimationstheorie* besprochen. Wir beschränken uns hier auf eine kurze Betrachtung von drei Verfahren zu Punkt 1 :

- Die numerische Lösung der Differentialgleichung
- Die Methode der Impulsinvarianz
- Die bilinearen Transformation

Für eine ausführliche Diskussion dieser Methoden ist Kapitel 5 im Buch von Oppenheim und Schafer<sup>4</sup> zu empfehlen.

Das Vorgehen ist in allen Fällen das gleiche: Gegeben ist eine kontinuierliche Differentialgleichung oder eine kontinuierliche Übertragungsfunktion  $H(s)$ ; gesucht sind die Koeffizienten  $a_n$  und  $b_n$  der *diskreten* Übertragungsfunktion  $H(z)$ , die es erlauben, den Output  $y_k$  des Filters aus einer Relation der Form

$$y_k = \sum_{n=0}^N a_n u_{k-n} - \sum_{m=1}^M b_m y_{k-m}$$

zu berechnen, wobei  $x_k$  einen beliebigen Input darstellt. Je nach angewendetes Verfahren sind sowohl die Anzahl als auch die Werte der Koeffizienten  $a_n$  und  $b_n$  verschieden und stellen somit unterschiedliche diskrete Annäherungen an die vorgegebenen Eigenschaften des kontinuierlichen Systems dar.

## Numerische Lösung der Differentialgleichung

Diese Methode, welche schon am Beispiel des RC-Filters sowie des Seismometers erläutert wurde, basiert einfach auf der Approximation der Differentialgleichung des Filters durch eine Differenzgleichung. Bei einer Diskretisierung mit einer gegebenen Abtastperiode  $T$  wird dabei meistens die

---

<sup>4</sup>Oppenheim, A. V., Schafer, R. W.: Digital Signal Processing. Prentice-Hall, Englewood Cliffs, New Jersey (1975).

Ableitung der Funktion  $y(t)$  zur Zeit  $t = kT$  durch eine *Rückwärtsdifferenz* approximiert:

$$\dot{y}_k = \left. \frac{dy}{dt} \right|_{t=kT} \approx \frac{y_k - y_{k-1}}{T}.$$

Eine Alternative ist die Näherung durch *zentralen Differenzen*:

$$\dot{y}_k = \left. \frac{dy}{dt} \right|_{t=kT} \approx \frac{y_{k+1} - y_{k-1}}{2T}.$$

Ableitungen höherer Ordnung werden einfach durch mehrmalige Anwendung der einen oder anderen Relation approximiert. Die sich daraus ergebende Differenzgleichung kann dann nach  $y_k$  aufgelöst werden, wobei es bei der zweiten Methode eventuell nötig ist, eine Zeitverschiebung um einen oder mehrere Abtastintervalle einzuführen, um das Resultat in die übliche Form einer Rekursionsformel für  $y_k$  zu bringen.

## Die Methode der Impulsinvarianz

Die Übertragungsfunktion eines analogen linearen Filters kann in der Form geschrieben werden:

$$H(s) = \frac{\sum_{n=0}^N c_n s^n}{\sum_{n=0}^M d_n s^n}$$

Für den Fall, dass der Grad des Zählers kleiner ist als der Grad des Nenners ( $N < M$ ), und  $H(s)$  nur einfache Pole besitzt, können wir mittels Partialbruch-Zerlegung die obige Gleichung in der Form schreiben:

$$H(s) = \sum_{n=1}^M H_n(s) = \sum_{n=1}^M \frac{A_n}{s + s_n},$$

wobei  $A_n$  im allgemeinen eine komplexe Konstante und  $-s_n$  die Polstelle ist.

Betrachten wir zuerst nur einen Term der Übertragungsfunktion, zum Beispiel

$$H_1(s) = \frac{A_1}{s + s_1}.$$

In der Tabelle der Laplace Transformationen finden wir die entsprechende inverse Laplace Transformation und erhalten so die Impulsantwort:

$$h_1(t) = A_1 e^{-s_1 t}.$$

Wie der Name dieser Methode schon andeutet, soll nun ein diskretes Filter realisiert werden, dessen Impulsantwort identisch mit der Impulsantwort des analogen Filters ist. Die mit der Schrittlänge  $T$  diskretisierte Impulsantwort ist also

$$h_1(kT) = A_1 e^{-s_1 kT},$$

wobei hier  $T$  die Abtastperiode ist und  $k$  die Menge der ganzen Zahlen durchläuft.

Die mit  $T$  multiplizierte Z-Transformierte dieser Zeitsequenz ist:

$$H_1(z) = T \sum_{k=0}^{\infty} h_1(kT) z^{-k} = T A_1 \sum_{k=0}^{\infty} e^{-s_1 k T} z^{-k}$$

oder in geschlossener Form (geometrische Reihe für  $|e^{s_1 T} z|^{-1} < 1$ )

$$H_1(z) = \frac{A_1 T}{1 - e^{-s_1 T} z^{-1}}$$

Diese Gleichung stellt die zu  $H_1(s)$  diskrete Form der Übertragungsfunktion dar.

Dieses Resultat lässt sich verallgemeinern zu

$$\begin{aligned} H(s) &= \sum_{n=1}^M H_n(s) = \sum_{n=1}^M \frac{A_n}{s + s_n} \\ \Rightarrow H(z) &= \sum_{n=1}^M H_n(z) = \sum_{n=1}^M \frac{A_n T}{1 - e^{-s_n T} z^{-1}} \end{aligned}$$

Wie wir aber schon im Zusammenhang mit der Fourier Transformation gesehen haben, hat die Diskretisierung eines Signals eine Beschränkung und eine Periodizität des entsprechenden Spektrums zur Folge. Dies bedeutet, dass Spektralanteile des Analogfilters, welche oberhalb der Nyquist Frequenz liegen, bei dieser Methode zu Aliasing Probleme führen. Das heisst, dass z.Bsp. bei Tiefpassfiltern mit einer Grenzfrequenz nahe an der Nyquist-Frequenz das Spektralverhalten stark verfälscht sein kann.

## Die Methode der bilinearen Transformation

Ausgehend von der Transformationsvorschrift für den Uebergang vom Laplace- zum Z-Bereich,  $z = e^{sT}$ , erhält man

$$s = \frac{1}{T} \ln z,$$

wobei  $s$  die komplexe Laplace-Frequenz und  $T$  das Abtastintervall sind. Für  $z > 0$  gilt die Potenzreihenentwicklung des natürlichen Logarithmus

$$\ln z = 2 \left[ \frac{z-1}{z+1} + \frac{(z-1)^3}{3(z+1)^3} + \dots + \frac{(z-1)^{2n+1}}{(2n+1)(z+1)^{2n+1}} + \dots \right]$$

Bei Abbruch nach dem ersten Glied erhalten wir

$$s = \frac{2}{T} \left[ \frac{z-1}{z+1} \right] = \frac{2}{T} \left[ \frac{1-z^{-1}}{1+z^{-1}} \right]$$

Um aus der analogen Übertragungsfunktion  $H(s)$  mittels der bilinearen Transformation die diskrete Übertragungsfunktion  $H(z)$  zu erhalten, genügt es,  $s$  durch die obige Beziehung zu ersetzen:

$$H(z) = H(s) \Big|_{s = \frac{2}{T} \frac{1-z^{-1}}{1+z^{-1}}}$$

Ausmultiplizieren ergibt dann wieder eine Beziehung der Form

$$H(z) = \frac{\sum_{n=0}^N a_n z^{-n}}{1 + \sum_{m=1}^M b_m z^{-m}}$$

Beachte aber, dass sowohl die Anzahl als auch die Werte der Koeffizienten  $a_n$  und  $b_m$  aus dieser Lösung verschieden sein werden von denen aus der Lösung der Differenzgleichung.

Um die Eigenschaften dieser Transformation zu untersuchen, wollen wir im Folgenden die Variable  $s$  mit  $s_a$  bezeichnen, wenn von analogen Filtern die Rede ist, und mit  $s_d$ , wenn es sich um die digitale Realisierung handelt. Dann ist  $z = e^{s_d T}$ . Der durch die bilineare Transformation gegebener Übergang von  $s_a$  zu  $s_d$  ist dann

$$s_a = \frac{2}{T} \left[ \frac{1 - e^{-s_d T}}{1 + e^{-s_d T}} \right]$$

Letzteres kann auch folgendermassen geschrieben werden:

$$s_a = \frac{2}{T} \tanh\left(\frac{s_d T}{2}\right)$$

Betrachten wir jetzt nochmals den Term

$$H_1(s_a) = \frac{A_1}{s_a + s_1}$$

und ersetzen darin die Variable  $s_a$  mit der durch die bilineare Transformation erhaltene Variable  $s_d$ , dann erhalten wir

$$H_1(s_d) = \frac{A_1}{\frac{2}{T} \tanh\left(\frac{s_d T}{2}\right) + s_1}$$

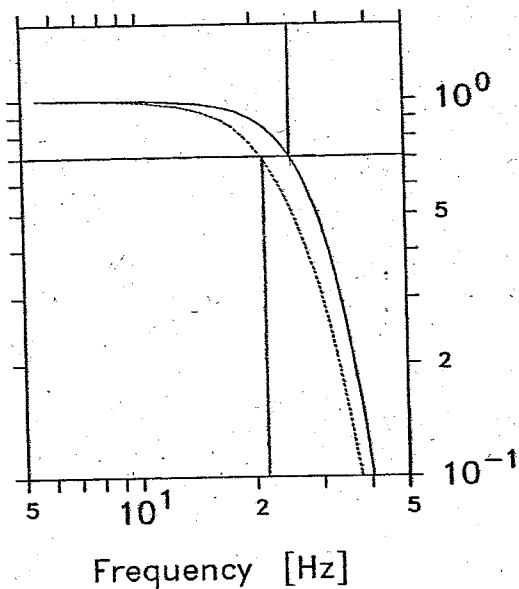
Nun wollen wir einige Eigenschaften von  $H_1(s_d)$  betrachten.

Mit  $s_a = j\omega_a$  und  $s_d = j\omega_d$  bekommen wir folgende Frequenzantworten für  $H_1(\omega_a)$  resp.  $H_1(\omega_d)$ :

$$H_1(\omega_a) = \frac{A_1}{j\omega_a + s_1}$$

und

$$H_1(\omega_d) = \frac{A_1}{j \frac{2}{T} \tan\left(\frac{\omega_d T}{2}\right) + s_1}$$



Figur 5.5: Frequenzgang eines 25 Hz Butterworth Tiefpassfilters 2. Ordnung, realisiert mittels der bilinearen Transformation. Gestrichelt: Unkompensiert ergibt eine tatsächliche Eckfrequenz  $f = 21.2$  Hz. Durchgezogen: Kompensiert mit  $f_c = 31.8$  Hz ergibt die gewünschte Eckfrequenz  $f_0 = 25$  Hz.

Wir sehen, dass  $H_1(\omega_a) \rightarrow 0$  nur wenn  $\omega_a \rightarrow \infty$ , während  $H_1(\omega_d) = 0$  für  $\omega_d T/2 = (2\lambda + 1)\pi/2$ . Die durchgeführte Transformation hat also  $\omega_a$  "komprimiert" und  $H_1(\omega_d)$  periodisch mit Periode  $\omega_d = 2\pi/T$  gemacht. Diese Eigenschaften zusammen mit der Tatsache, dass  $H(\omega_d) = 0$  für  $\omega_d = \frac{1}{2}(2\pi/T)$ , erlauben es, eine Diskretisierung von  $H(\omega_d)$  mit  $T$  als Abtastintervall vorzunehmen, ohne auf "aliasing"-Probleme zu stossen.

Der Nachteil dieser Digitalisierungsprozedur ist, dass das ursprüngliche Spektrum verzerrt wird (*warping effect*). Aus dem Vergleich der zwei Beziehungen für  $H_1(\omega_a)$  und  $H_1(\omega_d)$  sehen wir dass

$$\omega_a = \frac{2}{T} \tan\left(\frac{\omega_d T}{2}\right).$$

Mit anderen Worten, die Uebertragungsfunktion des mit der bilinearen Transformation realisierten diskreten Filters hat bei der Frequenz  $\omega_d$  den gleichen Wert wie die kontinuierliche Uebertragungsfunktion bei der Frequenz  $\omega_a$ . Das muss bei der Bestimmung der Filterparameter berücksichtigt werden. Wollen wir zum Beispiel ein Butterworth Tiefpassfilter mit der Eckfrequenz  $\omega_0$  realisieren, dann führt eine direkte Anwendung der bilinearen Transformation wegen dieser Frequenzverzerrung dazu, dass die tatsächliche Eckfrequenz des diskreten Filters,  $\omega_d$ , geringer als die gewünschte Frequenz,  $\omega_0$ , ist. Diese Diskrepanz ist umso grösser je näher die gewünschte Eckfrequenz bei der Nyquist-Frequenz liegt. Der Effekt kann zumindest teilweise

kompensiert werden, indem man die gewünschte Eckfrequenz,  $\omega_0$ , durch eine Frequenz  $\omega_c$  ersetzt, welche durch die Gleichung

$$\omega_c = \frac{2}{T} \tan\left(\frac{\omega_0 T}{2}\right)$$

gegeben ist (Siehe Abbildung 5.5). Auf Englisch wird diese Prozedur als *prewarping* bezeichnet.

# Kapitel 6

## Inverse Filter

### Einleitung

Die inverse Filterung wird in der Seismik sehr oft gebraucht, um unerwünschte Einflüsse in einer Zeitserie zu entfernen. Bei der Aufgabe, aus einer seismischen Aufzeichnung die wahre Bodenbewegung zu bestimmen, versucht man zum Beispiel, den Einfluss des Seismometers auf das beobachtete Signal rückgängig zu machen. Die inverse Filterung wird oft auch *Dekonvolution* oder *Restitution* genannt.

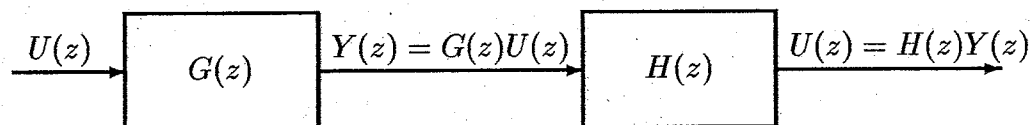
Es seien:

$U(z)$  die Z-Transformierte des zu rekonstruierenden Signals

$G(z)$  die diskrete Uebertragungsfunktion des unerwünschten Effektes

$Y(z) = G(z)U(z)$  die Z-Transformierte der Signalaufzeichnung

$H(z)$  die diskrete Uebertragungsfunktion des inversen Filters



Aus  $U(z) = H(z)Y(z) = H(z)(G(z)U(z)) = (H(z)G(z))U(z)$  folgt

$$H(z)G(z) = 1 \Rightarrow H(z) = \frac{1}{G(z)}$$

Obige Beziehung für die Z-Transformation des diskreten Filters und sein Inverses gilt sinngemäss auch für die kontinuierliche Uebertragungsfunktion

(Laplace Transformation) und für den Frequenzgang (Fourier Transformation). Im Prinzip wäre hiermit das Problem der Dekonvolution vollständig gelöst.

Die Ausführung der Dekonvolution stösst jedoch sowohl an grundsätzliche als auch an praktische Grenzen. Grundsätzlich gilt es zu beachten, dass nicht jedes stabile Filter  $G(z)$  auch tatsächlich ein inverses Filter  $H(z)$  besitzt, welches stabil ist. So ist eine Bedingung für die Stabilität von  $H(z)$ , dass  $G(z)$  minimalphasig ist. Im Weiteren gilt, dass kein noch so raffinierter Algorithmus diejenigen Signalanteile von  $U(z)$  restituieren kann, welche durch die Wirkung von  $G(z)$  auf einen Wert unterdrückt wurde, der kleiner ist als die Auflösung der Digitalisierung. In der Praxis gilt ausserdem, dass sowohl  $U(z)$  als auch  $Y(z)$  durch additive Störsignale (Noise) verfälscht sind. Dies kann oft zur Folge haben, dass durch den Dekonvolutionsprozess diese Störungen weit grösser werden als das gesuchte Nutzsinal  $U(z)$ . Somit ist es im Allgemeinen nicht möglich, das ursprüngliche Signal  $U(z)$  vollständig zu restituieren. Man muss sich auf diejenigen Signalanteile von  $U(z)$  und  $Y(z)$  beschränken, die bezogen auf die Wirkung von  $H(z)$  ein genügend gutes Signal/Stör-Verhältnis aufweisen.

## Optimale inverse Filter

Nehmen wir an, dass  $G(z)$  durch die Gleichung

$$G(z) = g_0 + g_1 z^{-1} + \dots + g_n z^{-n}$$

darstellbar sei ( $n$  endlich).  $G(z)$  entspricht also einem FIR- bzw. MA-Filter.  $H(z)$  wird dann

$$H(z) = \frac{1}{G(z)} = \frac{1}{g_0 + g_1 z^{-1} + \dots + g_n z^{-n}}$$

$H(z)$  wird in der üblichen Form durch

$$H(z) = h_0 + h_1 z^{-1} + h_2 z^{-2} + h_3 z^{-3} + \dots$$

dargestellt, wobei die verschiedenen  $h_i$  durch gewöhnliche Polynomdivision bestimmt werden können. Interessant ist hier die Tatsache, dass  $H(z)$  im Allgemeinen unendliche Länge besitzt, d.h. das inverse Filter ist ein IIR-Filter.

**Beispiel:** Betrachten wir den Fall wo  $G(z) = 1 + az^{-1}$ , d.h.  $g_0 = 1$  und  $g_1 = a$ . In diesem Fall gilt für das inverse Filter  $H(z)$ :

$$H(z) = \frac{1}{1 + az^{-1}} = 1 - az^{-1} + a^2 z^{-2} + \dots$$



Die inversen Filterkoeffizienten sind dann

$$h_0 = 1, h_1 = -a, h_2 = a^2, \dots, h_k = (-a)^k.$$

Es sei  $U(z) = 1$  (d.h. wir nehmen an das Eingangssignal in unser gegebenes System sei der  $\delta$ -Impuls gewesen), dann gilt

$$Y(z) = G(z)U(z) = 1 + az^{-1}$$

und die inverse Filterung restituiert uns das gewünschte Signal, nämlich den ursprünglichen Input

$$H(z)Y(z) = (1 - az^{-1} + a^2z^{-2} + \dots)(1 + az^{-1}) = 1$$

In der Praxis ist man interessiert, ein angenährtes inverses Filter endlicher Länge zu bestimmen. Betrachten wir zunächst das Resultat des vorherigen Beispiels. Wenn wir  $H(z)$  nach  $n + 1$  Glieder abbrechen, bekommen wir

$$\tilde{H}(z) = 1 - az^{-1} + a^2z^{-2} + \dots + (-a)^n z^{-n}$$

und der tatsächliche Ausgang unseres inversen Filters ist

$$\tilde{H}(z)Y(z) = (1 - az^{-1} + \dots + (-a)^n z^{-n})(1 + az^{-1}) = 1 - (-a)^{n+1} z^{-n-1}$$

Der Fehler  $e$ , als Differenz zwischen der gewünschten und der berechneten Zeitserie (bzw. zwischen ihren Z-Transformierten), wäre in diesem Fall

$$Z[e_n] = E(z) = e_0 + e_1 z^{-1} + e_2 z^{-2} + \dots = [H(z) - \tilde{H}(z)]Y(z) = (-a)^{n+1} z^{-n-1}$$

Wir definieren eine Energiefunktion der Fehlerreihe  $E(z)$ :

$$I = \sum_{k=0}^{\infty} e_k^2.$$

(Beachte, dass entsprechend der Definition der Z-Transformation die Koeffizienten von  $Z[e_n]$  nichts anderes als die Werte der Zeitreihe  $\{e_n\}$  sind).

In unserem Fall ergibt das  $I = a^{2(n+1)}$ , d.h. mit  $a < 1$  nimmt der Fehler  $I$  mit zunehmender Länge  $n$  ab. Das hängt damit zusammen, dass  $g_k$  bzw.  $G(z)$  einem minimalphasigen Filter entspricht ( $g_0 = 1, g_1 = a$  und  $g_0 > g_1$ ).

Diese Energiefunktion  $I$  der Fehlerreihe kann auch verwendet werden um eine Art Optimierung eines endlichdimensionalen inversen Filters vorzunehmen. Angenommen wir möchten das inverse Filter  $H(z)$  des vorherigen Beispiels mit nur zwei Gliedern approximieren, d.h.

$$\tilde{H}(z) = \tilde{h}_0 + \tilde{h}_1 z^{-1}$$

Wie müssen wir  $\tilde{h}_0$  und  $\tilde{h}_1$  bestimmen, damit  $I$  minimal wird?

Da wir angenommen haben, dass  $u_k = \delta_k$ , gilt  $H(z)Y(z) = U(z) = 1$  und dann ist

$$E(z) = H(z)Y(z) - \tilde{H}(z)Y(z) = 1 - [(\tilde{h}_0 + \tilde{h}_1 z^{-1})(1 + a z^{-1})].$$

Ausmultiplizieren liefert

$$E(z) = (1 - \tilde{h}_0) - (a\tilde{h}_0 + \tilde{h}_1)z^{-1} - a\tilde{h}_1 z^{-2}.$$

Wie schon erwähnt, sind die Koeffizienten dieses Polynoms genau die Werte der Fehlerreihe  $e_n$ , die endlich ist und in diesem Fall drei Punkte lang ist. Die ausmultiplizierte Summe der Quadrate dieser Koeffizienten liefert uns somit die Energiefunktion, die als Funktion der gesuchten Grössen  $\tilde{h}_0$  und  $\tilde{h}_1$  betrachtet werden kann:

$$I(\tilde{h}_0, \tilde{h}_1) = 1 - 2\tilde{h}_0 + (1 + a^2)\tilde{h}_0^2 + 2a\tilde{h}_0\tilde{h}_1 + (1 + a^2)\tilde{h}_1^2.$$

Um das optimale zweigliedrige Filter zu finden, suchen wir diejenigen Werte von  $\tilde{h}_0$  und  $\tilde{h}_1$ , welche die Funktion  $I(\tilde{h}_0, \tilde{h}_1)$  minimalisiert. Die Bedingungen für ein Minimum sind bekanntlich

$$\frac{\partial I}{\partial \tilde{h}_0} = 0 \quad \frac{\partial I}{\partial \tilde{h}_1} = 0.$$

Das führt zu einem linearen Gleichungssystem von zwei Gleichungen mit zwei Unbekannten

$$\begin{aligned} -2 + 2(1 + a^2)\tilde{h}_0 + 2a\tilde{h}_1 &= 0 \\ 2a\tilde{h}_0 + 2(1 + a^2)\tilde{h}_1 &= 0, \end{aligned}$$

welches aufgelöst werden kann mit dem Resultat:

$$\tilde{h}_0 = \frac{1 + a^2}{1 + a^2 + a^4}$$

und

$$\tilde{h}_1 = \frac{-a}{1 + a^2 + a^4},$$

sowie dem entsprechenden minimalen Fehler

$$I_{min} = \frac{a^4}{1 + a^2 + a^4}.$$

Das Prinzip der Bestimmung eines optimalen inversen Filters ist die Grundlage der Methoden der Estimationstheorie (z.Bsp. Wiener-Filter).

# Beispiele von optimalen inversen Filtern

## Inverses Filter 1

Bestimme das zu  $G(z) = 1 + az^{-1}$  approximative inverse Filter  $\tilde{H}(z)$  mit 3 Elementen, d.h.

$$\tilde{H}(z) = h_0 + h_1z^{-1} + h_2z^{-2}.$$

### Loesung

Gegeben das Filter mit

$$G(z) = 1 + az^{-1}$$

Gesucht das optimale inverse Filter mit drei Gliedern:

$$\tilde{H}(z) = h_0 + h_1z^{-1} + h_2z^{-2}$$

Die Z-Transformierte der Fehlerfunktion ist allgemein

$$E(z) = G(z)H(z) - G(z)\tilde{H}(z) = 1 - G(z)\tilde{H}(z)$$

und in diesem Fall

$$E(z) = (1 - h_0) - (ah_0 + h_1)z^{-1} - (ah_1 + h_2)z^{-2} - (ah_2)z^{-3}$$

Die Koeffizienten  $h_k$  des optimalen inversen Filters ergeben sich aus der Forderung, dass  $I = \sum e_k^2$  minimal sei. Da  $E(z) = e_0z^0 + e_1z^{-1} + \dots$  folgt

$$I = (1 - h_0)^2 + (ah_0 + h_1)^2 + (ah_1 + h_2)^2 + (ah_2)^2$$

und die Bedingungen für ein Minimum sind:

$$\begin{aligned}\frac{\partial I}{\partial h_0} &= -(1 - h_0) + a(ah_0 + h_1) = 0 \\ \frac{\partial I}{\partial h_1} &= (ah_0 + h_1) + a(ah_1 + h_2) = 0 \\ \frac{\partial I}{\partial h_2} &= (ah_1 + h_2) + a(ah_2) = 0\end{aligned}$$

Dies entspricht einem linearen Gleichungssystem mit drei Gleichungen, welches nach den drei Unbekannten,  $h_0, h_1, h_2$ , aufgelöst werden kann. In Matrix Schreibweise,  $\mathbf{A}\mathbf{h} = \mathbf{b}$ , ergibt dies

$$\begin{pmatrix} (1 + a^2) & a & 0 \\ a & (1 + a^2) & a \\ 0 & a & (1 + a^2) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} h_0 \\ h_1 \\ h_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Mit  $D = \text{Det}(\mathbf{A})$  und unter Anwendung der Kramer'schen Regel folgt

$$D = (1 + a^2)[(1 + a^2)^2 - a^2] - a[a(1 + a^2)] + 0 = (1 + a^2)(1 + a^4)$$

und

$$h_0 = \frac{(1 + a^2)^2 - a^2}{D} = \frac{1 + a^2 + a^4}{(1 + a^2)(1 + a^4)}$$

$$h_1 = -\frac{a(1 + a^2) - 0}{D} = -\frac{a}{(1 + a^4)}$$

$$h_2 = \frac{a^2}{D} = \frac{a^2}{(1 + a^2)(1 + a^4)}$$

## Inverses Filter 2

Bestimme die zu

$$G_1(z) = 2 + z^{-1} + z^{-2} \text{ und}$$

$$G_2(z) = 1 + z^{-1} + 2z^{-2}$$

approximative inverse Filter  $\tilde{H}_1$ , bzw.  $\tilde{H}_2$  mit 3 Elementen und berechne die zugeordneten Fehlerenergien.

**Loesung**

Gegeben sei das Filter

$$G(z) = a_0 + a_1 z^{-1} + a_2 z^{-2}$$

Gesucht ist das optimale inverse Filter

$$\tilde{H}(z) = h_0 + h_1 z^{-1} + h_2 z^{-2}$$

Die Transformierte der Fehlerreihe ist allgemein

$$E(z) = G(z)H(z) - G(z)\tilde{H}(z) = 1 - G(z)\tilde{H}(z) = e_0 z^0 + e_1 z^{-1} + \dots$$

und in diesem Fall

$$\begin{aligned} G(z)\tilde{H}(z) &= a_0 h_0 + (a_0 h_1 + a_1 h_0)z^{-1} + (a_0 h_2 + a_1 h_1 + a_2 h_0)z^{-2} \\ &+ (a_1 h_2 + a_2 h_1)z^{-3} + a_2 h_2 z^{-4} \end{aligned}$$

Die quadratische Fehlerfunktion ist

$$I = \sum_{k=0}^4 e_k^2$$

$$\begin{aligned} I &= (1 - a_0 h_0)^2 + (a_0 h_1 + a_1 h_0)^2 + (a_0 h_2 + a_1 h_1 + a_2 h_0)^2 + \\ &+ (a_1 h_2 + a_2 h_1)^2 + (a_2 h_2)^2 \end{aligned}$$

Die Bedingung für einen minimalen Fehler  $I$  sind

$$\frac{\partial I}{\partial h_0} = 0$$

$$\frac{\partial I}{\partial h_1} = 0$$

$$\frac{\partial I}{\partial h_2} = 0$$

Ausrechnung ergibt

$$-(1 - a_0 h_0) a_0 + (a_0 h_1 + a_1 h_0) a_1 + (a_0 h_2 + a_1 h_1 + a_2 h_0) a_2 = 0$$

$$(a_0 h_1 + a_1 h_0) a_0 + (a_2 h_0 + a_1 h_1 + a_2 h_0) a_1 + (a_1 h_2 + a_2 h_1) a_2 = 0$$

$$(a_0 h_2 + a_1 h_1 + a_2 h_0) a_0 + (a_1 h_2 + a_2 h_1) a_1 + a_2 h_2 a_2 = 0$$

oder umgestellt

$$(a_0^2 + a_1^2 + a_2^2) h_0 + (a_0 a_1 + a_1 a_2) h_1 + (a_0 a_2) h_2 = a_0$$

$$(a_0 a_1 + a_1 a_2) h_0 + (a_0^2 + a_1^2 + a_2^2) h_1 + (a_0 a_1 + a_1 a_2) h_2 = 0$$

$$(a_0 a_2) h_0 + (a_0 a_1 + a_1 a_2) h_1 + (a_0^2 + a_1^2 + a_2^2) h_2 = 0$$

Dies ist wieder ein lineares Gleichungssystem mit drei Gleichungen, welches nach den drei Unbekannten  $h_0, h_1, h_2$  aufgelöst werden kann.

### Aufgabe

Bestimmen Sie mit MATLAB die Koeffizienten  $h_k$  und den Fehler  $I$  für die zwei Fälle:

$$a_0 = 2 \quad a_1 = 1 \quad a_2 = 1 \quad \text{und}$$

$$a_0 = 1 \quad a_1 = 1 \quad a_2 = 2.$$

Wie erklären Sie den Unterschied in den berechneten Fehlern?

**Resultat für Fall 1:**  $a_0 = 2$   $a_1 = 1$   $a_2 = 1$ :

$$\begin{pmatrix} 6 & 3 & 2 \\ 3 & 6 & 3 \\ 2 & 3 & 6 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} h_0 \\ h_1 \\ h_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow \tilde{H}(z) = 9/20 - 1/5z^{-1} - 1/20z^{-2}$$

$$\text{Error} = I = 1/10$$

**Resultat für Fall 2:**  $a_0 = 1$   $a_1 = 1$   $a_2 = 2$ :

$$\begin{pmatrix} 6 & 3 & 2 \\ 3 & 6 & 3 \\ 2 & 3 & 6 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} h_0 \\ h_1 \\ h_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow \tilde{H}(z) = 9/40 - 4/40z^{-1} - 1/40z^{-2}$$

$$\text{Error} = I = 31/40$$

Fall 1 ist ein minimalphasiges Filter und sein Inverses ist stabil. Fall 2 hingegen ist ein maximalphasiges Filter und sein Inverses ist instabil.

# Kapitel 7

## Anhang

|     |   |    |
|-----|---|----|
| 7.1 | Ableitung und Integration . . . . .               | 60 |
| 7.2 | Die FFT in MATLAB . . . . .                       | 62 |
| 7.3 | Die Uebertragungsfunktion in MATLAB . . . . .     | 63 |
| 7.4 | Minimale und maximale Phase . . . . .             | 67 |
| 7.5 | Diskretes Butterworth Filter 2. Ordnung . . . . . | 69 |
| 7.6 | Antwortspektren . . . . .                         | 77 |
| 7.7 | Bestimmung des seismischen Momentes . . . . .     | 82 |

# Ableitung und Integration

## Numerische Ableitung

Oft ist es notwendig die diskrete Ableitung einer Zeitreihe zu berechnen oder eine Differentialgleichung zu diskretisieren. Ausgehend von der formalen Definition der Ableitung einer Funktion  $x(t)$  kann man ohne Schwierigkeiten die Ableitung durch einen Differenzenquotienten approximieren:

$$\frac{dx}{dt} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{x(t+h) - x(t)}{h} \approx \frac{\Delta x_k}{\Delta t_k} = \frac{x_k - x_{k-1}}{t_k - t_{k-1}}$$

Unter der Annahme eines konstanten Abtastintervalls  $T = t_k - t_{k-1}$  können wir schreiben:

$$\dot{x}_k = \left. \frac{dx}{dt} \right|_{t=kT} \approx \frac{x_k - x_{k-1}}{T}$$

Da das Resultat immer aus der Differenz zwischen zwei aufeinanderfolgenden Werten berechnet wird, besteht die so berechnete numerische Ableitung einer Zeitreihe von  $n$  Werten nur noch aus  $n - 1$  Werten. Wie oben geschrieben, entspricht dies einer *Rückwärtsdifferenz*, da die Steigung zwischen  $k$  und  $k - 1$  dem Resultat zur Zeit  $k$  zugewiesen wird. Weist man hingegen dem Resultat zur Zeit  $k$  die Steigung zwischen  $k + 1$  und  $k$  zu, entspricht das einer *Vorwärtsdifferenz*:

$$\dot{x}_k = \left. \frac{dx}{dt} \right|_{t=kT} \approx \frac{x_{k+1} - x_k}{T}$$

Beide Strategien sind unbefriedigend, da in der Tat diese Steigung einem Punkt im Inneren des Intervalls entspricht. Die Approximation ist wesentlich besser, wenn man die Zeitwerte der abgeleiteten Zeitreihe um ein halbes Abtastintervall verschiebt.

Durch mehrmaliges anwenden dieser Rechenregeln erhält man Approximationen von Ableitungen höherer Ordnung:

$$\ddot{x}_k = \left. \frac{d^2 x}{dt^2} \right|_{t=kT} \approx \frac{x_k - 2x_{k-1} + x_{k-2}}{T^2}$$

Eine Alternative ist die Approximation durch *zentralen Differenzen*:

$$\dot{x}_k = \left. \frac{dx}{dt} \right|_{t=kT} \approx \frac{x_{k+1} - x_{k-1}}{2T}$$

$$\ddot{x}_k = \left. \frac{d^2 x}{dt^2} \right|_{t=kT} \approx \frac{x_{k+1} - 2x_k + x_{k-1}}{T^2}$$

So geschrieben hat das Resultat zwei Werte weniger als die abzuleitende Zeitreihe. In der Praxis kann man aber den ersten Wert durch eine Vorwärtsdifferenz und den letzten Wert durch eine Rückwärtsdifferenz berechnen.



In der Praxis wird man meistens die Ableitung  $x_k$  einer neuen Zeitreihe  $y_k$  zuordnen, wie z. Bsp. in diesem Fall der Rückwärtsdifferenzen:

$$y_k = \frac{x_k - x_{k-1}}{T}.$$

In dieser Form kann man die numerische Ableitung auch als ein Filter betrachten, der die Zeitreihe  $x_k$  in eine neue Zeitreihe  $y_k$  überführt. Dabei handelt es sich bei allen oben vorgestellten Varianten der numerischen Ableitung um sogenannte *nichtrekursive* Filter: Jeder neue Wert  $y_k$  berechnet sich ausschliesslich aus einer Linearkombination von Werten der Zeitreihe  $x_k$ .

## Numerische Integration

Im Diskreten wird das Integral einer Funktion am naheliegendsten zu einer Summe über die entsprechende Zeitreihe:

$$y_k = T \sum_{n=0}^k x_n,$$

wobei hier  $T$  wieder das Abtastintervall ist. Da für jeden Wert  $y_k$  bei dieser Formulierung über alle früheren Werte von  $x$  summiert werden muss, wird der Rechenaufwand für grosse  $k$  enorm gross. Dem kann man leicht abhelfen, indem man stattdessen bei der Berechnung von  $y_k$  vom vorherigen Wert  $y_{k-1}$  ausgeht und diesen aufdatiert:

$$y_k = y_{k-1} + T x_k.$$

Diese einfache Summation liefert aber häufig nur eine unbefriedigende Näherung. Besser ist die Anwendung der sogenannten *Trapezregel*, welche die Summe über den Mittelwert von zwei benachbarten Werten ausführt und damit implizit jeweils zwischen zwei Punkten linear interpoliert:

$$y_k = y_{k-1} + T \frac{(x_k + x_{k-1})}{2}.$$

Wie im Falle der Ableitung, kann man das Integral als eine Art Filter betrachten, welche eine Zeitreihe  $x_k$  in eine neue Zeitreihe  $y_k$  verwandelt. Im Gegensatz zur Ableitung beruht aber der neue Wert  $y_k$  nicht nur auf einer Linearkombination von Werten der Zeitreihe  $x$  sondern auch noch auf einen früheren Wert von  $y$ . Darum wird ein solcher Filter als *rekursiv* bezeichnet.

cumtrapz → integration, methodes des trapèzes

## Die FFT in MATLAB

Die FFT einer Zeitreihe  $x_n$ , die  $N$  Werte lang ist, wird in MATLAB mit dem Befehl `fft(x,M)` ausgeführt. Wenn  $M < N$  ist, dann wird die Zeitreihe gekürzt, wenn  $M > N$  ist, dann werden entsprechend viele 0 angehängt. Ohne Angabe von  $M$ , also mit `fft(x)`, wird die FFT mit  $N$  Werten ausgeführt. Weder  $N$  noch  $M$  müssen einer Zweierpotenz entsprechen, aber für den Rechenaufwand ist es von Vorteil: Im ungünstigsten Fall wird aus der FFT eine langsame DFT. Sei im Folgenden  $M = N$ , dann ist

$$\text{fft}(\mathbf{x},N) = \sum_{n=0}^{N-1} x_n e^{-j\frac{2\pi kn}{N}}$$

Wird ein Spektrum mit korrekten Einheiten gewünscht, muss das Resultat noch mit der Länge des Abtastintervalls  $\Delta t$  multipliziert werden. Mit `Delta =  $\Delta t$`  ist dann

$$\mathbf{X} = \text{Delta} * \text{fft}(\mathbf{x},N) = \Delta t \sum_{n=0}^{N-1} x_n e^{-j\frac{2\pi kn}{N}} = X_k$$

Der komplexe Vektor  $\mathbf{X}$  hat  $N$  Werte. Zur Darstellung des vollständigen Spektrums von der Frequenz 0 bis zur Nyquist-Frequenz genügen aber die ersten  $N/2 + 1$  Werte. Mit der Abtastrate  $f_s$ , sei `Fnyq =  $F_{Nyq} = f_s/2 = 1/(2\Delta t)$`  die Nyquist Frequenz und `Nf =  $N/2 + 1$`  die Anzahl Frequenzwerte von 0 bis  $F_{Nyq}$ , dann kann man zur Darstellung des Resultates der FFT den Vektor mit den entsprechenden Frequenzwerten wie folgt erstellen:

$$\mathbf{f} = \text{linspace}(0, \text{Fnyq}, \text{Nf});$$

oder mit dem Frequenzintervall `df =  $\Delta f = 1/(N\Delta t)$` ,

$$\mathbf{f} = 0:\text{df}:\text{Fnyq};$$

Das Amplitudenspektrum kann man dann darstellen mit

$$\text{plot}(\mathbf{f}, \text{abs}(\mathbf{X}(1:\text{Nf})))$$

Die inverse FFT wird mit `ifft(X)` ausgeführt, wobei

$$\mathbf{y} = \text{ifft}(\mathbf{X}) = \frac{1}{N} \sum_{k=0}^{N-1} X_k e^{+j\frac{2\pi kn}{N}}$$

Das Resultat  $\mathbf{y}$  ist ein komplexer Vektor und die ursprüngliche reelle Zeitreihe  $x_n$  erhält man mit  `$\mathbf{x} = \text{real}(\mathbf{y})$` , oder mit  `$\mathbf{x} = \text{real}(\mathbf{y}) / \text{Delta}$` , falls  $\mathbf{X}$  korrekt mit  $\Delta t$  normiert worden ist. Falls  $X_k$  das Resultat von  `$\mathbf{X} = \text{fft}(\mathbf{x},M)$`  und  $M \neq N$  war, ist die Länge von  $x_n$  als Resultat von `ifft(X)` nun aber gleich  $M$  statt  $N$ .

# Die Uebertragungsfunktion in MATLAB

## Pole und Nullstellen

In MATLAB können die Pole und Nullstellen einer Uebertragungsfunktion sehr einfach mit der Funktion `zplane` in der komplexen Ebene dargestellt werden. Die Funktion `zplane` kann entweder explizit mit den Polen und Nullstellen in zwei Spaltenvektoren oder mit den Koeffizienten des Nenner- und Zählerpolynoms aufgerufen werden.

Beispiel für ein Seismometer mit der Dämpfung  $\xi$  und der Eigenfrequenz  $f_0$ , bzw.  $\omega_0 = 2\pi f_0$ :

Aus den Polen und Nullstellen (in Spaltenvektoren):

```
x = - $\omega_0$ * $\xi$ ;
y = - $\omega_0$ *sqrt(1- $\xi$ * $\xi$ );
pol = [x-j*y;x+j*y] % Pole
zer = [0;0] % Nullstellen
zplane(zer,pol)
```

Oder aus den Koeffizienten der Uebertragungsfunktion (in Zeilenvektoren):

```
num = [1 0 0] % Zaehler
den = [1 2* $\xi$ * $\omega_0$   $\omega_0$ * $\omega_0$ ] % Nenner
zplane(num,den)
```

Im Fall eines Polynoms nullten Grades (eine Konstante), welches keine Nullstellen besitzt, muss im Aufruf mit Polen und Nullstellen

```
zer = NaN bzw. pol = NaN
(Not a Number) gesetzt werden. Die Alternative
zer = [ ] bzw. pol = [ ]
```

(leere Matrix) funktioniert nicht in allen Versionen vom MATLAB.

Der Fall eines Polynoms nullten Grades ist dann gegeben, wenn die Uebertragungsfunktion eine Konstante im Zähler oder Nenner hat. Die Funktion `zplane` interpretiert aber einen Skalar oder einen Vektor mit einem einzigen Element als Spaltenvektor und somit als Nullstelle eines Polynoms. Beim Aufruf von `zplane` mit Koeffizienten der Uebertragungsfunktion ist im Fall von Polynomen nullten Grades daher Vorsicht geboten.

Sei zum Beispiel der Nenner einer Uebertragungsfunktion gleich 1, dann wird

```
num = 1 oder num = [1]
```

von `zplane` als eine Nullstelle bei  $(1, j0)$  interpretiert. Setzt man stattdessen

```
num = [0 1] oder num = NaN
```

dann erkennt `zplane`, dass keine Nullstelle vorhanden ist, wobei in gewissen Versionen von MATLAB darauf geachtet werden muss, dass die Längen der Vektoren `num` und `den` gleich sind.

Als Alternative kann man im Aufruf von `zplane` die Nullstellen der zwei Polynome `num` und `den` mit der Funktion `roots` auch explizit berechnen:

```
zplane(roots(num), roots(den))
```

Bei diesem Vorgehen führt auch im Beispiel mit einer 1 im Zähler der Uebertragungsfunktion der Aufruf `zplane(roots(1), roots(den))` zum richtigen Resultat.

Die Funktion `zplane` macht keine Annahmen bezüglich der unabhängigen Variablen der Polynome und dient daher der Darstellung der Pole und Nullstellen sowohl analytischer Uebertragungsfunktionen (Laplace Transformation) als auch diskreter Uebertragungsfunktionen (Z-Transformation).

## Frequenzantwort

Der Betrag und die Phase der Frequenzantwort als Funktion der Kreisfrequenz  $\omega$  lässt sich aus den Koeffizienten der analytischen Uebertragungsfunktion mit der Funktion `freqs` und der diskreten Uebertragungsfunktion mit der Funktion `freqz` berechnen und darstellen.

Seien `num` und `den` wieder Zähler und Nenner der analytischen Uebertragungsfunktion, dann wird mit dem Aufruf `freqs(num, den)` die komplexe Frequenzantwort als Funktion der Kreisfrequenz  $\omega$  an 200 logarithmisch gleichverteilten Frequenzwerten berechnet und dargestellt:

$$H(j\omega) = H(s)|_{s=j\omega} = \frac{\sum_{n=0}^N a_n s^n}{1 + \sum_{m=1}^M b_m s^m} |_{s=j\omega}$$

Will man das Resultat als Funktion der Frequenz,  $f$ , statt der Kreisfrequenz,  $\omega$ , muss `freqs` wie folgt aufgerufen werden:

```
[H,w] = freqs(num,den);
subplot(2,1,1)
loglog(w/(2*pi),abs(H))
grid
xlabel('Frequenz (Hz)')
ylabel('Betrag')
subplot(2,1,2)
semilogx(w/(2*pi),unwrap(angle(H))/pi)
grid
xlabel('Frequenz (Hz)')
ylabel('Phase (PI)')
```

Hier berechnet die Funktion `angle` die Phase einer komplexen Zahl und die Funktion `unwrap` kompensiert allfällige Phasensprünge bei multiplen von  $\pm\pi$ .

Zur Berechnung der Frequenzantwort eines diskreten Systems, müssen nicht nur die Koeffizienten  $a$  und  $b$  des Zähler- und Nennerpolynoms angegeben werden, sondern auch die Anzahl Frequenzwerte  $n$  und die Abtastrate  $f_s$ . Der Aufruf nur mit `freqz(a,b)` ist zwar auch möglich, liefert

aber eine Darstellung, die in den meisten Fällen unbefriedigend ist. Mit dem unten aufgeführten Aufruf berechnet `freqz` die  $n$  linear gleichverteilte Frequenzwerte  $f$  zwischen 0 und der Nyquist Frequenz sowie die entsprechenden Werte der komplexen Frequenzantwort  $H$ :

```
[H,f] = freqz(a,b,n,fs);
subplot(2,1,1)
loglog(f,abs(H))
grid
xlabel('Frequenz (Hz)')
ylabel('Betrag')
subplot(2,1,2)
semilogx(f,unwrap(angle(H))/pi)
grid
xlabel('Frequenz (Hz)')
ylabel('Phase (PI)')
```

## Impulsantwort

Zur Berechnung der Impulsantwort eines diskreten Systems genügt es, die entsprechende Differenzgleichung definitionsgemäss auf einen diskreten Einheitsimpuls anzuwenden. In MATLAB steht dafür die Funktion `filter` zur Verfügung:

$$y = \text{filter}(a,b,u)$$

Die Funktion `filter` entspricht einer Anwendung der allgemeinen Form der Differenzgleichung

$$b_0 y_k = a_0 u_k + a_1 u_{k-1} + \dots + a_N u_{k-N} - b_1 y_{k-1} - \dots - b_M y_{k-M}$$

Der Name `filter` kommt daher, dass die Differenzgleichung die allgemeine Form eines linearen und zeitinvarianten Filters darstellt. Damit  $y$  schliesslich einer Impulsantwort entspricht, muss  $u$  vorgängig als Einheitsimpuls definiert sein:

```
u = zeros(1,n);
```

```
u(1,1) = 1/deltat;
```

wobei hier  $n$  die gewünschte Länge der Impulsantwort und `deltat` das Abtastintervall  $\Delta t = 1/f_s$  sind. Der Vektor  $a$  entspricht den sogenannten *Moving Average* oder MA Koeffizienten  $a_n$  und der Vektor  $b$  den *Autoregressive* oder AR Koeffizienten  $b_m$ . Dabei gilt es aber zu berücksichtigen, dass MATLAB keinen Index 0 kennt. Somit sind

$$a(1) = a_0 \text{ und } a(N+1) = a_N$$

$$b(1) = b_0 \text{ und } b(M+1) = b_M$$

Unserer Notation entsprechend ist für alle Filter  $b(1) = b_0 = 1$ . Wird die Routine `filter` mit  $b(1) \neq 1$  aufgerufen, dann führt `filter` selber eine Normierung  $b(m)/b(1)$  und  $a(n)/b(1)$  aus. Ausserdem gilt für ein reines AR Filter  $a = [a_0]$  und für ein reines MA Filter  $b = [1]$ .

**Beachte:** In manchen Textbüchern und anderen Arbeiten sind die AR Koeffizienten mit umgekehrtem Vorzeichen definiert, so dass in der Differenzgleichung nur  $+$  Zeichen erscheinen. Ausserdem sind in der MATLAB Dokumentation die Koeffizienten  $a$  und  $b$  gegenüber unserer Notation konsequent vertauscht.

# Minimale und maximale Phase <sup>1</sup>

## *The Energy Distribution in a Wavelet*

Before entering into a discussion of high-resolution-shaping filters, let us consider first how the energy of a wavelet is distributed throughout the time range of its duration. We shall find that the manner in which this energy is distributed provides a basis for understanding how high-resolution filters work. In Figure 7-2, four different wavelets are shown. Each of these wavelets has the same time duration and the same frequency content (see Figure 7-3), so that the amounts of high frequencies, intermediate frequencies, and low frequencies are precisely the same in each wavelet. But, while these wavelets all have a common frequency magnitude spectrum and a common time duration, they differ in their time distribution of energy. The term "magnitude spectrum," as we have used it before, refers to the absolute value of the Fourier transform of the wavelet.

Wavelet (a) has its energy concentrated as closely as possible to its front end; that is, the energy is *delayed* in time the smallest possible amount

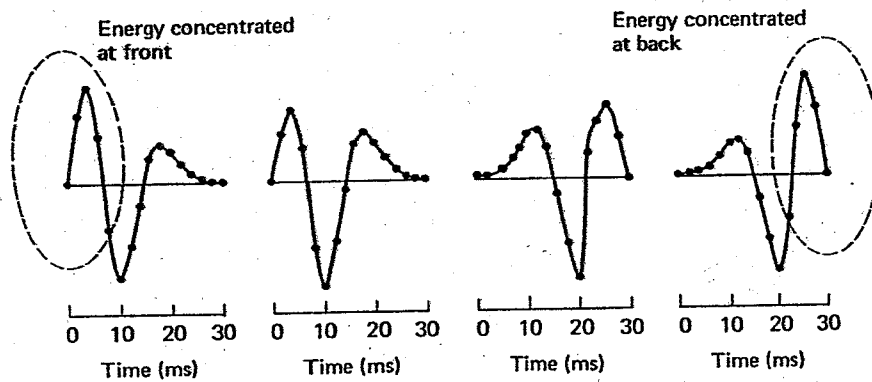


Figure 7-2. Suite of four wavelets having the same magnitude spectrum: (a) minimum delay; (b) and (c) mixed delay; (d) maximum delay.

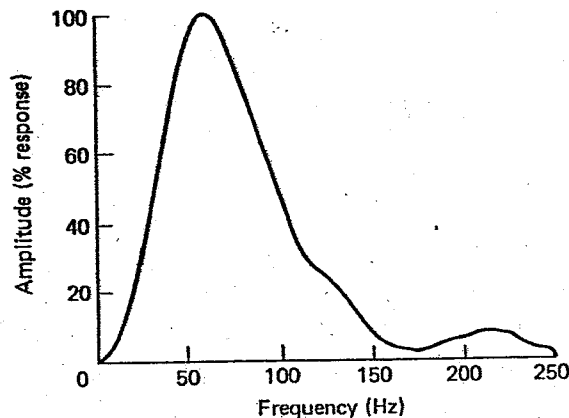


Figure 7-3. Common magnitude spectrum of the wavelet suite of Figure 7-2.

<sup>1</sup>Auszug aus: E. A. Robinson & S. Treitel, Geophysical Signal Analysis, Prentice Hall, 1980.

for any wavelet with the magnituded spectrum shown in Figure 7-3. Under the restriction that the frequency content of the wavelet suite of Figure 7-2 be fixed, it is not possible for wavelet (a) to have its energy concentrated still closer to its front end. For this reason, the wavelet (a) is called the *minimum-delay* wavelet of the suite. Of course, if we were allowed to add still higher frequencies to the spectrum of Figure 7-3, we could made the wavelet (a) have a still sharper leading edge, but under the restriction that the magnitude spectrum be held constant, the minimum-delay wavelet has a leading edge that is sharper than the leading edge of any other wavelet of the suite.

At the other extreme, we have wavelet (d). This wavelet has its energy concentrated as closely as possible to its back end. In other words, the energy is *delayed* in time the greatest possible amount for *any wavelet* with the same magnitude spectrum and same time duration as wavelet (a). It is not possible to make wavelet (d) have its energy concentrated any farther to the back under the restriction that the magnitude spectrum and time duration of the wavelet suite of Figure 7-2 be as specified. For this reason, wavelet (d) is called a *maximum-delay wavelet*. It is easy to see that wavelet (d) is nothing more than the time reverse of wavelet (a); that is, the maximum-delay wavelet is the time reverse of the minimum-delay wavelet. It also follows that the wavelet (d) has the sharpest possible trailing edge of any wavelet with our given magnitude spectrum and time duration.

Intermediate between the minimum-delay and the maximum-delay wavelets are the mixed-delay wavelets. As we have seen in Chapter 5, there are many possible different mixed-delay wavelets as we run through the transition of energy concentration from the front to the back edge of the wavelet. In Figure 7-2, we show two of the possible mixed-delay wavelets having the same time duration and magnitude spectrum as wavelets (a) and (d). We see that the energy in wavelet (b) is delayed, with respect to the minimum-delay wavelet (a), but not delayed as much as in the case for wavelet (c).

If we deal in discrete time, so that the time variable  $t$  is replaced by a time index  $i$  that assumes integer values corresponding to the time points that are sampled,

$$i = 0, 1, 2, \dots,$$

then we know that the number of wavelets with the same starting point and the same finite time duration and having a given magnitude spectrum is finite. Let us assume that a wavelet is sampled at equal increments of time  $\Delta t$  at the points  $i = 0, 1, 2, \dots, n$ . We then say that this wavelet, described by  $(n + 1)$  sampled values, is an  $(n\Delta t)$ -duration wavelet, or equivalently an  $(n + 1)$ -length wavelet. In general, there will be *at most*  $2^n$  different discretely sampled  $(n\Delta t)$ -duration wavelets having the same starting point and a given magnitude spectrum. There are no other *finite* duration wavelets with the same beginning point and this given magnitude spectrum although there are an infinite number of infinite duration wavelets having the same beginning point and this given magnitude spectrum. In Figure 7-2, the points at which the waveshapes have been sampled are indicated by heavy black dots. We note that all four of these waveshapes are sampled at 2 ms increments at a total of 16 discrete points, i.e., they are 30 ms duration wavelets. We have here chosen to show only four wavelets of the suite having the magnitude spectrum given in Figure 7-3. While all members of a suite have a common magnitude spectrum, their phase spectra are distinct. In fact, the minimum-delay wavelet (a) is the "minimum phase-lag" member of the suite, while the maximum-delay wavelet (d) is the "maximum phase-lag" member of the same suite.



## Butterworth Filter 2. Ordnung

### Pole und Nullstellen

Die komplexe Uebertragungsfunktion des Butterworth Tiefpassfilters 2. Ordnung ist

$$H(s) = \frac{\omega_0^2}{s^2 + \sqrt{2}\omega_0 s + \omega_0^2}.$$

Da der Zähler eine Konstante ist, hat das Butterworth Tiefpassfilter keine Nullstellen. Die Nullstellen des Nenners und somit die Pole des Filters sind

$$s_p = -\omega_0 \left( \frac{\sqrt{2}}{2} \pm j \frac{\sqrt{2}}{2} \right)$$

mit

$$H(s) = \frac{\omega_0^2}{(s - s_1)(s - s_2)}.$$

Diese zwei komplexen Pole sowie die Tatsache, dass keine Nullstellen vorhanden sind, genügen also um das Filter im Kontinuum vollständig zu bestimmen.

Die komplexe Uebertragungsfunktion des Butterworth Hochpassfilters 2. Ordnung ist

$$H(s) = \frac{s^2}{s^2 + \sqrt{2}\omega_0 s + \omega_0^2}.$$

Die Pole des Hochpassfilters sind die gleichen wie diejenigen des Tiefpassfilters, es kommen aber noch zwei Nullstellen im Ursprung (0,0) der komplexen s-Ebene hinzu.

Ein Vergleich mit der Uebertragungsfunktion und den Pole und Nullstellen des Seismometers zeigt, dass, bis auf das Vorzeichen, das Seismometer für den Fall gleicher Bewegungsgrößen am Ein- und Ausgang und mit einer Dämpfung  $\xi = \sqrt{2}/2$  einem Butterworth Hochpassfilter 2. Ordnung entspricht (siehe hierzu die Darstellung der Lage der Nullstellen und Pole in der komplexen Ebene für das Seismometer).

Den Frequenzgang  $H(\omega)$  erhält man ganz einfach, indem man in der Uebertragungsfunktion  $s$  mit  $j\omega$  ersetzt.

## Diskretes Butterworth Tiefpassfilter

Wir gehen aus von der analytische Uebertragungsfunktion des Butterworth Tiefpassfilters 2. Ordnung

$$H(s) = \frac{\omega_0^2}{s^2 + \sqrt{2}\omega_0 s + \omega_0^2}.$$

Die Rücktransformation von  $H(s)$  liefert die Impulsantwort, wobei wir zur Vereinfachung der Schreibweise  $\frac{\sqrt{2}}{2} = \xi$  setzen:

$$h(t) = 2\xi\omega_0 e^{-\xi\omega_0 t} \sin(\xi\omega_0 t).$$

Wir wollen nun noch die zugehörige Differentialgleichung aufschreiben. dazu erinnern wir uns an die allgemeine Definition der Uebertragungsfunktion:

$$H(s) = \frac{Y(s)}{U(s)}$$

Umstellen der Uebertragungsfunktion ergibt in unserem Fall

$$(s^2 + \sqrt{2}\omega_0 s + \omega_0^2)Y(s) = \omega_0^2 U(s)$$

oder

$$s^2 Y(s) + \sqrt{2}\omega_0 s Y(s) + \omega_0^2 Y(s) = \omega_0^2 U(s).$$

Dies ist die Laplace-Transformation der Differentialgleichung des Filters. Durch Rücktransformation erhalten wir die Differentialgleichung

$$\ddot{y} + \sqrt{2}\omega_0 \dot{y} + \omega_0^2 y = \omega_0^2 u(t).$$

Unser Ziel ist es nun, eine Prozedur zu finden, die uns ermöglicht, die Wirkung dieses Filters auf ein beliebiges diskretes Eingangssignal zu modellieren. Wir suchen also einen Algorithmus, der uns für ein diskretes Eingangssignal  $u_k$  das gefilterte diskrete Ausgangssignal  $y_k$  liefert. Dazu wollen wir im Folgenden vier verschiedene Verfahren vergleichen:

1. Diskretisierung der Differentialgleichung mittels Rückwärtsdifferenzen,
2. Diskretisierung der Differentialgleichung mittels zentraler Differenzen,
3. Realisierung der diskreten Uebertragungsfunktion unter der Voraussetzung der Impulsinvarianz,
4. Realisierung der diskreten Uebertragungsfunktion mit der bilinearen Transformation.

## Rückwärtsdifferenzen

Eine Möglichkeit eine Differentialgleichung zu diskretisieren besteht darin, die Ableitungen durch Rückwärtsdifferenzen zu ersetzen. Mit  $T$  als Bezeichnung für das Abtastintervall machen wir folgende Näherungen:

$$\dot{y}(t)|_{t=kT} \approx \frac{y_k - y_{k-1}}{T} \quad \text{und} \quad \ddot{y}(t)|_{t=kT} \approx \frac{y_k - 2y_{k-1} + y_{k-2}}{T^2}.$$

Einsetzen dieser Näherungen in die Differentialgleichung ergibt:

$$\frac{y_k - 2y_{k-1} + y_{k-2}}{T^2} + \sqrt{2}\omega_0 \frac{y_k - y_{k-1}}{T} + \omega_0^2 y_k = \omega_0^2 u_k$$

Umgeformt führt dies auf die Differenzgleichung,

$$(1 + \sqrt{2}\omega_0 T + \omega_0^2 T^2)y_k + (-\sqrt{2}\omega_0 T - 2)y_{k-1} + y_{k-2} = \omega_0^2 T^2 u_k$$

die ohne weiteres nach  $y_k$  aufgelöst werden kann:

$$y_k = a_0 u_k - b_1 y_{k-1} - b_2 y_{k-2},$$

mit den Koeffizienten

$$\begin{aligned} a_0 &= \frac{\omega_0^2 T^2}{1 + \sqrt{2}\omega_0 T + \omega_0^2 T^2} \\ b_1 &= \frac{-\sqrt{2}\omega_0 T - 2}{1 + \sqrt{2}\omega_0 T + \omega_0^2 T^2} \\ b_2 &= \frac{1}{1 + \sqrt{2}\omega_0 T + \omega_0^2 T^2}. \end{aligned}$$

Im Fall eines 1 Hz-Filters ist  $\omega_0 = 2\pi$  und mit einer Abtastrate von 100 Hz ist  $T = 0.01$  s. Das ergibt die Koeffizienten

$$\begin{aligned} a_0 &= +0.003613 \\ b_1 &= -1.911463 \\ b_2 &= +0.915076. \end{aligned}$$

## Zentrale Differenzen

Eine andere Möglichkeit diese Differentialgleichung zu diskretisieren besteht darin, die Ableitungen durch zentrale Differenzen zu ersetzen. Mit  $T$  als Bezeichnung des Abtastintervalls machen wir folgende Näherungen:

$$\dot{y}(t)|_{t=kT} \approx \frac{y_{k+1} - y_{k-1}}{2T} \quad \text{und} \quad \ddot{y}(t)|_{t=kT} \approx \frac{y_{k+1} - 2y_k + y_{k-1}}{T^2}.$$

Einsetzen dieser Näherungen in die Differentialgleichung ergibt:

$$\frac{y_{k+1} - 2y_k + y_{k-1}}{T^2} + \sqrt{2}\omega_0 \frac{y_{k+1} - y_{k-1}}{2T} + \omega_0^2 y_k = \omega_0^2 u_k$$

Zur Vereinfachung der Schreibweise setzen wir wieder  $\frac{\sqrt{2}}{2} = \xi$  und erhalten nach umformen

$$(1 + \xi\omega_0 T)y_{k+1} + (\omega_0^2 T^2 - 2)y_k + (1 - \xi\omega_0 T)y_{k-1} = \omega_0^2 T^2 u_k$$

Da diese Gleichung für alle  $k$  gilt, kann man die Indizes um einen Abtastwert verschieben

$$(1 + \xi\omega_0 T)y_k + (\omega_0^2 T^2 - 2)y_{k-1} + (1 - \xi\omega_0 T)y_{k-2} = \omega_0^2 T^2 u_{k-1}$$

und erhält somit wieder eine Differenzgleichung die ohne weiteres nach  $y_k$  aufgelöst werden kann:

$$y_k = a_0 u_k + a_1 u_{k-1} - b_1 y_{k-1} - b_2 y_{k-2},$$

mit den Koeffizienten

$$\begin{aligned} a_0 &= 0 \\ a_1 &= \frac{\omega_0^2 T^2}{1 + \xi\omega_0 T} \\ b_1 &= \frac{\omega_0^2 T^2 - 2}{1 + \xi\omega_0 T} \\ b_2 &= \frac{1 - \xi\omega_0 T}{1 + \xi\omega_0 T} \end{aligned}$$

Die Koeffizienten eines 1 Hz-Filters ( $\omega_0 = 2\pi$ ) mit einer Abtastrate von 100 Hz ( $T = 0.01$  s) sind

$$\begin{aligned} a_0 &= 0.0 \\ a_1 &= +0.003780 \\ b_1 &= -1.911142 \\ b_2 &= +0.914922. \end{aligned}$$

### Impulsinvarianz

Die Übertragungsfunktion kann auch wie folgt ausgedrückt werden:

$$H(s) = \frac{Y(s)}{U(s)} = \frac{\omega_0^2}{s^2 + \sqrt{2}\omega_0 s + \omega_0^2} = \frac{\omega_0^2}{(s + s_1)(s + s_2)}$$

oder als Summe von Partialbrüchen

$$H(s) = \frac{A_1}{(s + s_1)} + \frac{A_2}{(s + s_2)}$$

mit den Polen  $s_1$  und  $s_2$ .

Zur Vereinfachung der Schreibweise setzen wir wieder  $\frac{\sqrt{2}}{2} = \xi$ .

Dann sind die Pole

$$s_1 = \xi\omega_0(1 + j) \text{ und } s_2 = \xi\omega_0(1 - j).$$

Die Koeffizienten  $A_1$  und  $A_2$  berechnen sich aus

$$\frac{\omega_0^2}{(s + s_1)(s + s_2)} = \frac{A_1}{(s + s_1)} + \frac{A_2}{(s + s_2)}$$

oder auf einen gemeinsamen Nenner gebracht und ausmultipliziert

$$\omega_0^2 = A_1(s + s_2) + A_2(s + s_1).$$

Setzt man  $s = -s_1$ , folgt

$$A_1 = \frac{\omega_0^2}{s_2 - s_1} = +j\xi\omega_0$$

und setzt man  $s = -s_2$ , folgt

$$A_2 = \frac{\omega_0^2}{s_1 - s_2} = -j\xi\omega_0.$$

Eine diskrete Realisierung  $H(z)$  der Uebertragungsfunktion  $H(s)$  unter der Bedingung, dass die diskrete Impulsantwort  $h_k$  gleich der analytischen Impulsantwort  $h(t)$  ist, führt zu

$$H(z) = \frac{A_1 T}{1 - e^{-s_1 T} z^{-1}} + \frac{A_2 T}{1 - e^{-s_2 T} z^{-1}}$$

Auf den gleichen Nenner gebracht und ausmultipliziert wird dies zur diskreten Uebertragungsfunktion

$$H(z) = \frac{(A_1 + A_2)T + (-A_1 T e^{-s_2 T} - A_2 T e^{-s_1 T})z^{-1}}{1 + (-e^{-s_2 T} - e^{-s_1 T})z^{-1} + (e^{-(s_1 + s_2)T})z^{-2}}$$

in der gewünschten Form

$$H(z) = \frac{a_0 + a_1 z^{-1}}{1 + b_1 z^{-1} + b_2 z^{-2}}$$

Durch einsetzen der Beziehungen für  $A_1$ ,  $A_2$ ,  $s_1$  und  $s_2$  und anschliessendem ausmultiplizieren erhalten wir die Koeffizienten

$$\begin{aligned} a_0 &= (j\xi\omega_0 - j\xi\omega_0)T = 0 \\ a_1 &= -j\xi\omega_0 T e^{-\xi\omega_0 T} (e^{+j\xi\omega_0 T} - e^{-j\xi\omega_0 T}) = 2\xi\omega_0 T e^{-\xi\omega_0 T} \sin(\xi\omega_0 T) \\ b_1 &= -e^{-\xi\omega_0 T} e^{+j\xi\omega_0 T} - e^{-\xi\omega_0 T} e^{-j\xi\omega_0 T} = -2e^{-\xi\omega_0 T} \cos(\xi\omega_0 T) \\ b_2 &= e^{-[\xi\omega_0(1+j) + \xi\omega_0(1-j)]T} = e^{-2\xi\omega_0 T} \end{aligned}$$

Da  $H(z) = Y(z)/U(z)$  folgt

$$Y(z) = (a_0 + a_1 z^{-1})U(z) - (b_1 z^{-1} + b_2 z^{-2})Y(z).$$

Rücktransformation liefert dann die gewünschte Differenzgleichung

$$y_k = a_0 u_k + a_1 u_{k-1} - b_1 y_{k-1} - b_2 y_{k-2}.$$

Die Koeffizienten eines 1 Hz-Filters ( $\omega_0 = 2\pi$ ) mit einer Abtastrate von 100 Hz ( $T = 0.01$  s) sind

$$\begin{aligned} a_0 &= 0.0 \\ a_1 &= +0.003775 \\ b_1 &= -1.911200 \\ b_2 &= +0.914976. \end{aligned}$$

## Bilineare Transformation

Wir gehen wiederum aus von der analytischen Uebertragungsfunktion

$$H(s) = \frac{\omega_0^2}{s^2 + \sqrt{2}\omega_0 s + \omega_0^2}.$$

Ausführen der bilinearen Transformation mit der Substitution

$$s = \frac{2}{T} \frac{1 - z^{-1}}{1 + z^{-1}}$$

ergibt

$$H(z) = \frac{\omega_0^2}{\left(\frac{2}{T} \frac{1 - z^{-1}}{1 + z^{-1}}\right)^2 + \sqrt{2}\omega_0 \frac{2}{T} \frac{1 - z^{-1}}{1 + z^{-1}} + \omega_0^2}.$$

Ausmultiplizieren liefert die gesuchte diskrete Uebertragungsfunktion:

$$H(z) = \frac{\omega_0^2 T^2 + 2\omega_0^2 T^2 z^{-1} + \omega_0^2 T^2 z^{-2}}{(\omega_0^2 T^2 + 2\sqrt{2}\omega_0 T + 4) + (2\omega_0^2 T^2 - 8)z^{-1} + (\omega_0^2 T^2 - 2\sqrt{2}\omega_0 T + 4)z^{-2}}.$$

Dividiert man nun den Zähler und Nenner durch

$$c_0 = (\omega_0^2 T^2 + 2\sqrt{2}\omega_0 T + 4),$$

dann erhält man einen Ausdruck für  $H(z)$  in der gewünschten Form:

$$H(z) = \frac{a_0 + a_1 z^{-1} + a_2 z^{-2}}{1 + b_1 z^{-1} + b_2 z^{-2}},$$

mit den Koeffizienten

$$\begin{aligned} a_0 &= \frac{\omega_0^2 T^2}{c_0} \\ a_1 &= 2 \frac{\omega_0^2 T^2}{c_0} \\ a_2 &= \frac{\omega_0^2 T^2}{c_0} \\ b_1 &= \frac{2\omega_0^2 T^2 - 8}{c_0} \\ b_2 &= \frac{\omega_0^2 T^2 - 2\sqrt{2}\omega_0 T + 4}{c_0}. \end{aligned}$$

Da  $H(z) = Y(z)/U(z)$  folgt

$$Y(z) = (a_0 + a_1 z^{-1} + a_2 z^{-2})U(z) - (b_1 z^{-1} + b_2 z^{-2})Y(z).$$

Rücktransformation liefert dann die gewünschte Differenzgleichung

$$y_k = a_0 u_k + a_1 u_{k-1} + a_2 u_{k-2} - b_1 y_{k-1} - b_2 y_{k-2}.$$

Für ein 1 Hz Tiefpassfilter ist  $f_0 = 1$  und unter Berücksichtigung der Frequenzverschiebung als Folge der Verzerrung der bilinearen Transformation erhalten wir

$$\omega_0 = \frac{2}{T} \tan\left(\frac{2\pi f_0 T}{2}\right) = 6.285253$$

anstelle von  $\omega_0 = 6.283185$ .

Mit einer Abtastrate von 100 Hz ist  $T = 0.01$  s. Dann erhalten wir die folgenden Werte für die Koeffizienten:

$$a_0 = +0.000945$$

$$a_1 = +0.001889$$

$$a_2 = +0.000945$$

$$b_1 = -1.911197$$

$$b_2 = +0.914976$$

Für ein 10 Hz Tiefpassfilter führt die Berücksichtigung der Frequenzverschiebung zu  $\omega_0 = 64.384$  anstelle von  $\omega_0 = 62.832$ . Die entsprechenden Koeffizienten sind dann:

$$a_0 = +0.067455$$

$$a_1 = +0.134911$$

$$a_2 = +0.067455$$

$$b_1 = -1.142980$$

$$b_2 = +0.412802$$

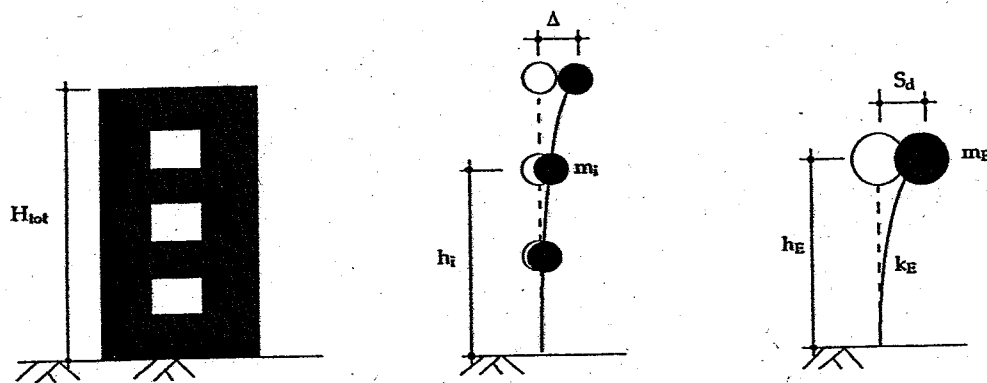


# Antwortspektren

## Einleitung

Antwortspektren sind für die Ingenieure eines der wichtigsten Hilfsmittel zur Berechnung der dynamischen Beanspruchung eines Bauwerkes. Im Erdbebeningenieurwesen stellen sie das Bindeglied zwischen Seismologie und Bauwerksbemessung dar.

Den Antwortspektren zu Grunde liegt die Tatsache, dass das dynamische Verhalten eines Bauwerkes als Reaktion auf eine horizontale Anregung des Fundamentes durch das Verhalten eines Mehrmassenschwingers modelliert werden kann. Man stelle sich z.Bsp. ein mehrgeschossiges Gebäude vor, bei dem die Massen auf der Höhe der Decken konzentriert werden, die über die Wände miteinander verbunden sind. In der Praxis wird dieses Modell noch weiter vereinfacht und durch einen äquivalenten Einmassenschwinger ersetzt, dessen Eigenfrequenz und Dämpfung dem Schwingungsverhalten der ersten Eigenmode des Bauwerkes entsprechen. Es wird angenommen, dass für die dynamische Beanspruchung und somit auch für die Bemessung des Bauwerkes der Spitzenwert der Antwort des äquivalenten Einmassenschwingers auf eine gegebene Anregung (Bodenbeschleunigung) massgebend ist. Im Antwortspektrum werden diese Spitzenwerte als Funktion aller über einen bestimmten Frequenzbereich verteilten Eigenfrequenzen von Einmassenschwingern mit gleicher Dämpfung dargestellt.



In der Praxis sind die Antworten sowohl der Verschiebung als auch der Geschwindigkeit und der Beschleunigung von Interesse. Ein einzelnes Antwortspektrum stellt also die Beanspruchung vieler verschiedener Bauwerke mit unterschiedlicher Eigenfrequenz als Folge einer bestimmten Anregung (Beben) an einem gegebenen Standort dar. Die geglättete Einhüllende einer Vielzahl von Antwortspektren verschiedener Beben an vergleichbaren Standorten bildet schliesslich die Grundlage eines sogenannten Bemessungsspektrums.

Das Antwortspektrum unterscheidet sich in zwei wesentlichen Punkten vom Fourier Amplitudenspektrum:

- Während im Fourier Spektrum in der Regel eine Amplitudendichte (eine Grösse pro Hz) dargestellt ist, stellt das Antwortspektrum den Spitzenwert einer Amplitude dar;
- Die Frequenz im Fourier Spektrum entspricht dem Frequenzinhalt eines gegebenen Signals, währenddessen sie im Antwortspektrum der Eigenfrequenz verschiedener Einmassenschwinger, bzw. verschiedener Gebäude entspricht.

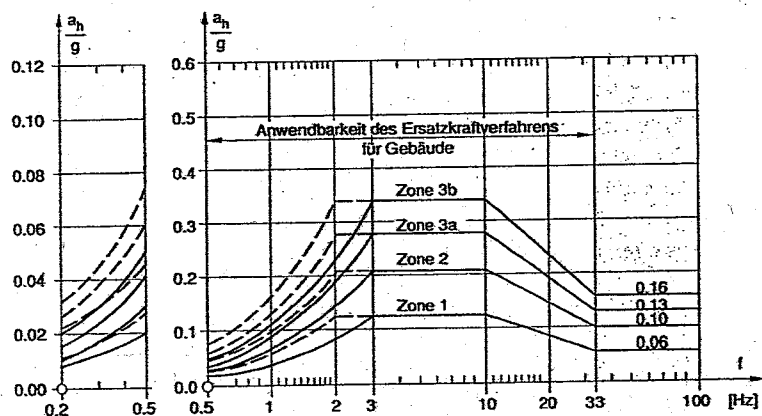


Bild 3.9: Elastische Bemessungs-Antwortspektren der Beschleunigung (Mittelwerte für 5% Dämpfung) für steife Böden (ausgezogen) und für mittelsteife Böden (gestrichelt) der Norm SIA 160 (nach [SIA 160])

## Numerische Lösung des Einmassenschwingers

Zur Berechnung von Antwortspektren müssen wir die Differentialgleichung des Einmassenschwingers lösen:

$$\ddot{y} + 2\xi\omega\dot{y} + \omega^2 y = -u(t)$$

Dabei ist  $y(t)$  die Auslenkung der Masse relativ zur Bodenbewegung, bzw. relativ zur Bewegung des Gebäudfundamentes und  $u(t) = \ddot{x}$  ist die Bodenbeschleunigung. Diese Gleichung ist mit der Differentialgleichung des Seismometers identisch:  $\xi$  ist die Dämpfung ausgedrückt als Bruchteil der kritischen Dämpfung und  $\omega$  ist gleich  $2\pi f = \sqrt{k/m}$ , wobei  $f$  die Eigenfrequenz des betrachteten Schwingers mit Steifigkeit  $k$  und Masse  $m$  ist. Typische Werte für  $\xi$  eines Bauwerkes im elastischen Verformungsbereich sind 0.02 - 0.1. Um diese Differentialgleichung zu diskretisieren, wollen wir hier die Ableitung mit *zentralen Differenzen* approximieren:

$$\dot{y}_k = \left. \frac{dy}{dt} \right|_{t=kT} \approx \frac{y_{k+1} - y_{k-1}}{2T}$$

$$\ddot{y}_k = \left. \frac{d^2y}{dt^2} \right|_{t=kT} \approx \frac{y_{k+1} - 2y_k + y_{k-1}}{T^2}$$

Das Abtastintervall ist hier mit  $T$  bezeichnet. Es zeigt sich, dass diese Näherung genauer ist als diejenige mit den einfachen Differenzen. Durch Einsetzen dieser Approximationen in die Differentialgleichung erhalten wir die gesuchte Differenzgleichung:

$$y_{k+1} - 2y_k + y_{k-1} + \xi\omega T(y_{k+1} - y_{k-1}) + \omega^2 T^2 y_k = -T^2 u_k$$

$$(1 + \xi\omega T)y_{k+1} = -T^2 u_k - (\omega^2 T^2 - 2)y_k - (1 - \xi\omega T)y_{k-1}$$

Da diese Gleichung für jeden Wert von  $k$  Gültigkeit haben muss, können wir sie auch in die übliche Form einer Rekursionsformel für  $y_k$  bringen:

$$y_k = a_0 u_k + a_1 u_{k-1} - b_1 y_{k-1} - b_2 y_{k-2}$$

mit

$$a_0 = 0$$

$$a_1 = \frac{-T^2}{1 + \xi\omega T}$$

$$b_1 = \frac{\omega^2 T^2 - 2}{1 + \xi\omega T}$$

$$b_2 = \frac{1 - \xi\omega T}{1 + \xi\omega T}$$

Die so erhaltene relative Auslenkung (Verschiebung)  $y_k$  ist eine Zeitreihe, welche die Antwort eines Einmassenschwingers auf eine beliebige Bodenbeschleunigung  $u_k$  darstellt. Der Einmassenschwinger wirkt dank der angenommenen geringen Dämpfung wie ein schmalbandiges Filter, das die Frequenzen im Bereich seiner Eigenfrequenz relativ zu den anderen Frequenzen stark anhebt. Die so berechnete Zeitreihe ist eine zufriedenstellende Näherung sofern die Eigenfrequenz  $f$  des betrachteten Einmassenschwinger wesentlich kleiner ist als die Abtastrate. Tatsächlich ist die Lösung nur für  $f/\text{Abtastrate} < 1/\pi$  stabil.

## Berechnung der Antwortspektren

### Verschiebung, Geschwindigkeit und Beschleunigung

Das Antwortspektrum der relativen Verschiebung  $S_d$  erhält man indem man die Zeitreihe  $y_k$  für alle gewünschten Werte von  $\omega$  bzw.  $f$  berechnet und jeweils einfach das Maximum des Betrages jeder dieser Zeitreihen als Funktion der Frequenz aufträgt:

$$S_d(\omega, \xi) = \max |y_k(\omega, \xi)|.$$

Wendet man die anfangs eingeführte Näherung für die Ableitung nun auf die berechneten relativen Verschiebungsantworten  $y_k$  an, erhält man die entsprechenden relativen Geschwindigkeiten  $\dot{y}_k$  und relativen Beschleunigungen  $\ddot{y}_k$ . Mit der eingangs schon definierten Bodenbeschleunigung  $u_k = \ddot{x}_k$  erhalten wir dann ganz einfach aus  $\ddot{y}_k + u_k$  die für die Ingenieur-Belange massgebliche absolute Beschleunigungsantwort. In der Praxis muss man bei der numerischen Ausführung von  $\ddot{y}_k + u_k$  darauf achten, dass die Indizes der zwei Zeitreihen sich auch tatsächlich entsprechen. So resultiert im hier verwendeten Verfahren die berechnete Zeitreihe  $\ddot{y}_k$  gegenüber der eingegebenen Bodenbeschleunigung  $u_k$  um einen Wert verzögert.

Die entsprechenden Antwortspektren  $S_v$  und  $S_a$  setzen sich dann wie im Falle von  $S_d$  aus den Betragsmaxima der für die verschiedenen Frequenzen  $\omega$  berechneten Antworten zusammen:

$$S_v(\omega, \xi) = \max |\dot{y}_k(\omega, \xi)|,$$

$$S_a(\omega, \xi) = \max |\ddot{y}_k(\omega, \xi) + u_k|.$$

### Pseudogeschwindigkeit und Pseudobeschleunigung

Als Alternative zur oben angegebenen Berechnung von  $S_v$  und  $S_a$  kann man, unter Ausnützung der bekannten Regeln der Ableitung einer harmonischen Schwingung, eine spektrale Geschwindigkeit und eine spektrale Beschleunigung direkt aus  $S_d$  berechnen:

$$S_{pv} = \omega S_d$$

und

$$S_{pa} = \omega^2 S_d.$$

Diese zwei Grössen sind als *Pseudogeschwindigkeit* und *Pseudobeschleunigung* bekannt. Wie man zeigen kann, sind die Grössen  $S_{pv}$  und  $S_v$ , bzw.  $S_{pa}$  und  $S_a$ , nicht identisch (e.g. Bachmann 1995)<sup>2</sup>. Im Bereich mittlerer Frequenzen stimmen  $S_{pv}$  und  $S_v$  recht gut überein. Bei tiefen und hohen Frequenzen sind die Abweichungen aber beträchtlich. Im Falle von  $S_{pa}$  und  $S_a$  sind die Abweichungen vom Dämpfungsmass  $\xi$  abhängig aber bei den gebräuchlichen Dämpfungswerten in der Praxis vernachlässigbar.

### Bemerkung

Die hier vorgestellte Methode zur Berechnung der relativen Verschiebungsantwort  $y_k$  aus der Diskretisierung der Differentialgleichung mittels zentraler Differenzen ist nur eine von vielen Möglichkeiten. Zwei weitere Methoden sind im Buch von Chopra (1995)<sup>3</sup> beschrieben. Es ist auch denkbar die der Differentialgleichung des Einmassenschwingers entsprechende Uebertragungsfunktion aufzuschreiben und diese mittels der Methode der Impulsinvarianz oder der Bilinearen Transformation in eine diskrete Uebertragungsfunktion zu überführen.

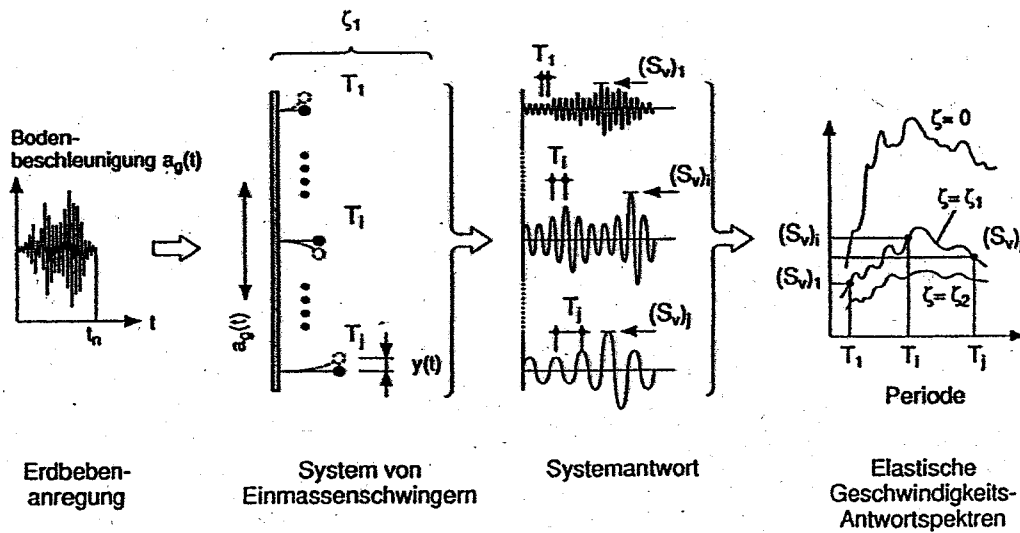


Bild 2.25: Ermittlung von elastischen Antwortspektren (nach [HS 84])

<sup>2</sup>H. Bachmann: Erdbebensicherung von Bauwerken, Birkäuser, 1995.

<sup>3</sup>A. K. Chopra: Dynamics of Structures, Prentice Hall, (1995).

## Bestimmung des seismischen Momentes

Die Bewegung (P-Welle) eines homogenen und isotropen Mediums im Fernfeld einer seismischen Scherdislokation kann als Punktquelle wie folgt dargestellt werden:

$$\vec{u}^P(\vec{x}, t) = \frac{F^P}{4\pi\rho\alpha^3r} \mu A \dot{\vec{u}}(t - r/\alpha) \hat{\mathbf{l}}.$$

- $\vec{u}^P(\vec{x}, t)$  ist die beobachtete Verschiebung in Richtung des Strahles zwischen Herd und Beobachtungsort  $\hat{\mathbf{l}}$ , verursacht durch eine P-Welle an der Stelle  $\vec{x}$  und zur Zeit  $t$ ,
- $\alpha$  ist die P-Wellengeschwindigkeit,  $\rho$  die Dichte und  $\mu$  der Schermodul an der Quelle,
- $F^P$  beschreibt die Abstrahlcharakteristik als Funktion der Orientierung der Bruchfläche und der Richtung zum Beobachtungsort,
- $r$  ist die Entfernung zwischen Quelle ( $\xi$ ) und Beobachtungsort ( $\vec{x}$ ),
- $A$  ist die Fläche auf der der Bruch stattgefunden hat,
- $\dot{\vec{u}}$  ist die durchschnittliche Dislokationsgeschwindigkeit (zeitliche Ableitung des Versatzes zwischen der einen und der anderen Seite eines Scherbruches) auf der Fläche  $A$  und zur Zeit  $t - r/\alpha$ .

Das Signal, welches einer direkten P-Welle entspricht ist also proportional zur durchschnittlichen Dislokationsgeschwindigkeit (*slip velocity*) über der Bruchfläche. Mit den entsprechenden Werten für die Abstrahlcharakteristik und seismischen Geschwindigkeiten und unter Berücksichtigung der entsprechenden Richtungen der Bewegungen gilt obige Gleichung ganz analog auch für die SV- und SH-Wellen (siehe Aki+Richards, Gleichungen 4.87).

Integrieren wir nun über dieses Signal, dann erhalten wir:

$$\int_0^\infty u^P(\vec{x}, t) dt = \frac{F^P}{4\pi\rho\alpha^3r} \mu A \int_0^\infty \dot{u}(t - r/\alpha) dt$$

$$\int_0^\infty u^P(\vec{x}, t) dt = \frac{F^P}{4\pi\rho\alpha^3r} \mu \bar{u} A.$$

Mit  $\bar{u}$  der durchschnittlichen Dislokation auf der Fläche  $A$  und der bekannten Formel  $M_0 = \mu \bar{u} A$  für das seismische Moment erhalten wir:

$$M_0 = \frac{4\pi\rho\alpha^3 r}{FP} \int_0^\infty u^P(\vec{x}, t) dt.$$

Das seismische Moment ist also proportional zum Integral der beobachteten Bodenverschiebung. Mit der entsprechenden seismischen Geschwindigkeit und Abstrahlcharakteristik gilt ein analoges Resultat auch für die direkte SV- bzw. SH-Welle.

Die Fourier Transformierte  $U(\omega)$  einer beliebigen Funktion  $u(t)$  ist:

$$U(\omega) = \int_{-\infty}^\infty u(t) e^{j\omega t} dt.$$

Für ein Signal welches erst zur Zeit  $t = 0$  beginnt gilt daher

$$\int_0^\infty u(t) dt = |U(\omega = 0)|,$$

wobei  $|U(\omega = 0)|$  die spektrale Amplitudendichte bei der Frequenz  $\omega = 0$  ist. Somit können wir das seismische Moment auch aus dem Spektrum der Bodenverschiebung bestimmen:

$$M_0 = \frac{4\pi\rho\alpha^3 r}{FP} |U^P(\vec{x}, \omega = 0)|.$$

Wir wollen im Weiteren den Wert des Integrals der Bodenverschiebung, bzw. des Amplitudenspektrums bei der Frequenz 0 mit  $\Omega_0$  bezeichnen. Tatsächlich zeigt es sich sowohl aus theoretischen Ueberlegungen als auch aus Beobachtungen, dass in erster Näherung das Verschiebungsspektrum einer seismischen Punktquelle durch einen konstanten Plateauwert für tiefe Frequenzen und einen zu  $f^{-\gamma}$  proportionalen Amplitudenabfall oberhalb einer Eckfrequenz  $f_c$  gekennzeichnet ist. Somit kann in einer Log-Log Darstellung des Spektrums der Wert  $\Omega_0$  durch Extrapolation des spektralen Plateauwertes bestimmt werden. Entsprechend dem viel verwendeten Herdmodell von Brune ist  $\gamma \approx 2$ , aber andere Modelle lassen unterschiedliche Werte erwarten. Auch die beobachteten Werte von  $\gamma$  können erheblich abweichen von dem Standardwert 2, wobei es aber oft sehr schwierig ist, den Einfluss der Quelle und des Uebertragungsmediums sauber zu trennen.

In der Praxis muss aus dem Teil des beobachteten Seismogramms, welches die direkte P- oder S-Welle enthält, durch Dekonvolution mit der Instrumentencharakteristik, die wahre Bodenverschiebung restituiert werden. Ausserdem sollten die Aufzeichnungen der drei Komponenten der Bodenbewegung in die Richtung des einfallenden Strahles, bzw. senkrecht dazu, rotiert werden, oder ein entsprechender Korrekturterm berücksichtigt werden. Weitere Korrekturterme, welche die ursprüngliche Bedingung des homogenen Vollraumes etwas lockern, berücksichtigen die Effekte der freien

Oberfläche (die Bewegung entspricht der Ueberlagerung von einfallender und zurückreflektierten Wellen), sowie von Eigenschaften des Beobachtungsstandortes, (*site effects*), bedingt durch erniedrigte oberflächennahe Geschwindigkeiten. Ein brauchbarer Kompromiss zwischen der unrealistischen Annahme des homogenen Vollraumes und der Berechnung vollständiger Green'scher Funktionen ist die folgende Beziehung:

$$M_0 = \frac{4\pi\rho_\xi^{1/2}\rho_x^{1/2}\alpha_\xi^{5/2}\alpha_x^{1/2}r}{F_{\theta\phi}^P S_z^P} \Omega_0.$$

Die zusätzlichen Terme sind

- $S_z^P$  die Verstärkung der freien Oberfläche für die Vertikalkomponente der P-Welle,
- $\rho_\xi$  und  $\rho_x$  die Dichte an Quelle und Beobachtungsstandort sowie
- $\alpha_\xi$  und  $\alpha_x$  die P-Wellengeschwindigkeiten an Quelle und Beobachtungsstandort.

Diese Gleichung gilt mit den entsprechenden Wellengeschwindigkeiten und Korrekturtermen auch für die Horizontalkomponenten der Bodenbewegung sowie für SV- und SH-Wellen. Bei der Extrapolation des Spektrums von allzu hohen Frequenzen auf den Spektralwert bei  $\omega = 0$  ist auch die anelastische Absorption ( $Q^{-1}$ ) entlang des Wellenweges und insbesondere im stationsnahen Untergrund nicht zu vernachlässigen.

Für  $M_0$  in N·m erhält man die Momentenmagnitude aus

$$M_w = \frac{2}{3} \log M_0 - 6.$$



Stichworte zur Vorlesung Zeitreihenanalyse im SS  
=====

Diskrete Signale: Auflösung und Dynamik; Numerische Ableitung.

Laplace Transformation:

Wichtige Eigenschaften:

Linearität, Nullpunktverschiebung, Ableitung, Integral, Faltung.

Beziehung zwischen FT und LT

LT der Delta-Funktion

LT als Mittel zur Lösung von Differentialgleichungen.

Impulsantwort

Frequenzantwort (Frequenzgang) -- Amplitude und Phase!

Übertragungsfunktion

Wichtig: Die Frequenzantwort ist die FT der Impulsantwort

Die Übertragungsfunktion ist die LT der Impulsant.

Oft wird die Frequenzantwort als Übertragungsfunktion bezeichnet.

Beispiel Seismometer:

Wichtig: Die tatsächliche Form der ImpAnt und ÜbertragFktn

hängt von den Einheiten der Grössen am Ein- und Ausgang ab.

Pole und Nullstellen der Übertragungsfunktion.

Frequenzselektive Filter:

Hochpass, Tiefpass, Bandpass

Eckfrequenz und Ordnung

Z-Transformation:

Koeffizienten der ZT sind Werte der Zeitreihe

Rücktransformation durch Polynomdivision

Beziehung zwischen ZT und LT

Diskrete Filter:

Diskrete Übertragungsfunktion:

Moving Average (MA), Finite Impulse Response (FIR)

Auto Regressive (AR), Infinite Impulse Response (IIR)

ARMA Filter

Phasengang von Filtern:

Minimum delay (minmalphasig), maximum delay (maximalphasig)

und mixed delay -- Kausale und akausale Filter

Realisierung Diskreter Filter

Diskretisierung der Differentialgleichung (Differenzenglg.)

Bilineare Transformation

Impulsinvarianz

--> Vor und Nachteile verschiedener Methoden

Inverse Filter -- Möglichkeiten und Grenzen.

Beispiele: Instrumentenkorrektur und Antwortspektren.

2002/04/09, n.d.

Zusätzliche Literatur zur

Zeitreihenanalyse und Signalverarbeitung

Matlab:

D. Hanselman and B. Littlefield:  
Mastering MATLAB 5.  
Prentice Hall, London, 1998.

Teil I und II:

B. Buttkus:

Spektralanalyse und Filtertheorie in der angewandten Geophysik.  
Springer, 1991.

R. Schlittgen und B. Streitberg:  
Zeitreihenanalyse.  
Oldenburg Verlag, Muenchen, 1999.

R. H. Shumway and D. S. Stoffler:  
Time Series Analysis and its Applications.  
Springer Verlag, New York, 2000.

Teil II:

A. V. Oppenheim and R. W. Schaffer:  
Digital Signal Processing.  
Prentice-Hall, Englewood Cliffs, New Jersey, 1975.

E.A. Robinson, T.S. Durani, L.G. Peardon:  
Geophysical Signal Processing.  
Prentice Hall International, 1986.

F. Scherbaum:  
Of Poles and Zeros, Fundamentals of Digital Seismology.  
Kluwer Academic Publishers, 1996.

2002/02/04, n.d.

Zeitreihenanalyse in der Geophysik -- Uebung SS01  
 =====

Auflösung und Dynamik  
 -----

Die in dieser Uebung zu analysierenden Signale sind Beschleunigungsaufzeichnungen von einem Erdbeben an zwei verschiedenen Standorten an einer Stauwand. Die gegebenen Datenwerte entsprechen den Zahlenwerten (counts) des A/D-Wandlers im Beschleunigungsmessgeraet. Es handelt sich um einen 12-Bit A/D-Wandler und die maximale Beschleunigung, die aufgezeichnet werden kann, ist 0.5 g (d.h. 50% der Erdbeschleunigung).

Erste Frage: Wie gross ist die Auflösung (in % von g und in m/s\*\*2) dieses Beschleunigungsmessgeraetes?  $0,024\%$ ,  $0,0024 \text{ m/s}^2$

Als Vergleich dazu: Ein moderner Breitbandseismograph ist mit einem 24-Bit A/D-Wandler ausgestattet mit einer Empfindlichkeit von 2.38  $\mu\text{Volt/count}$  und mit einem Seismometer mit einer Empfindlichkeit von 1500 Volt/(m/s) -- d.h das Seismometer misst die Bodenschwingungsgeschwindigkeit und nicht die Beschleunigung. Letztere kann man aber einfach durch numerische Ableitung aus der Geschwindigkeit erhalten (Abtastezeit 120 Hz).

Zweite Frage: Was waere die Auflösung und die theoretisch maximale Beschleunigung, die von so einem Breitbandseismograph aufgezeichnet werden kann? Warum ist die so berechnete maximale Beschleunigung in der Praxis nicht erreichbar?  $1,5867 \cdot 10^{-4} \text{ m/s} = \text{Auflösung}$   
 $0,0266 \text{ m/s} = \text{Bandbreite}$

Dritte Frage (aus der Analyse der Signale zu beantworten): Wie gross war die maximale Beschleunigung auf der Mauerkrone und am Mauerfuss (in % von g und in m/s\*\*2)?

$$\begin{aligned} \max k &= 85,95 \rightarrow 2\% \rightarrow 0,12 \text{ m/s}^2 \\ \max f &= 14,53 \rightarrow 0,3\% \rightarrow 0,03 \text{ m/s}^2 \end{aligned}$$

Vorgehen:

Die Daten befinden sich in /afs/ethz.ch/users/d/deichman/signals/ und heissen k2 und f2 (f=Mauerfuss, k=Mauerkrone). Im Folgenden ist das moegliche Vorgehen aufgezeigt.

```

% Daten einlesen und Offset entfernen
k = load('/afs/ethz.ch/users/d/deichman/signals/k2');
k = k - mean(k);
f = load('/afs/ethz.ch/users/d/deichman/signals/f2');
f = f - mean(f);
%
n = 4096; % Anzahl Werte
srate = 200; % Abtastezeit
tt = linspace(0, (n-1)/srate, n); % Zeitvektor
% Signale Zeichnen
figure(1)
subplot(2,1,1)
plot(tt,k)
axis([min(tt), max(tt), min(k), max(k)])
ylabel('Mauerkrone')
subplot(2,1,2)
plot(tt,f)
axis([min(tt), max(tt), min(f), max(f)])
ylabel('Mauerfuss')
xlabel('Zeit (s)')
% Maxima bestimmen
max(abs(k))
max(abs(f))
% Bemerkung:
% Am Schwaecheren der zwei Signale (Mauerfuss) erkennt man
% deutlich die Grenzen der Auflöesung des A/D Wandlers dieser
% Beschleunigungs-messgeraete.

```

title

title

Zeitreihenanalyse in der Geophysik -- Ubung SS02  
 =====

Vergleichen Sie die numerischen Ableitungen einer Sinus-Kurve mit der Matlab Funktion diff (einfache Differenz) und mit der Funktion cdiff (zentrale Differenz).

Kopieren Sie sich die Funktion cdiff auf ihr Arbeitsverzeichnis:  
 cp /afs/ethz.ch/users/d/deichman/mfiles/cdiff.m

Das M-File fuer diese Ubung befindet sich auf /afs/ethz.ch/users/d/deichman/zr/ss02/aufgabe.m Wenn Sie die fehlenden Angaben vervollstaendigen, koennen Sie die Ubung dann als M-File laufen lassen.

```

clear
% Ohne Noise:
n = 50;
x =
Y = sin(x);
delta =
dy =
cy =
xd =

figure(1)
subplot(3,1,1)
plot(x,sin(x))
legend('Sinus(x)')

subplot(3,1,2)
plot(x,cos(x))
hold on
plot(x,cy,'c')
plot(xd,dy,'r')
hold off
legend('Cosinus(x)', 'Zentrale Diff.', 'Einfache Diff.')

subplot(3,1,3)
err = cos(x)-cy;
Fehler_Zentrale_Differenz = std(err)
Fehler_Einfache_Differenz = std(err)
plot(x,err,'c')
plot(xd,err,'r')
hold off
legend('Noise', 'Fehler Zentrale Diff.', 'Fehler Einfache Diff.')

% Anzahl Werte
% x-Werte: Definieren Sie einen Vektor
% von 0 bis 2*pi mit n Werten
% y-Werte: Sinus-Kurve
% Abtastintervall?
% Einfache Differenz mit der Funktion diff
% (help diff hilft weiter)
% zentrale Differenz mit der Funktion cdiff
% (siehe code der Funktion cdiff)
% Neue x-Werte fuer die einfache Differenz:
% Was ist die neue Anzahl Werte und um wieviel
% muessen sie verschoben werden?

% Plot Sinus-Kurve

% Plot Cosinus-Kurve

% Plot Zentrale Differenz
% Plot Einfache Differenz

subplot(3,1,2)
err = cos(xd)-dy;
Fehler_Zentrale_Differenz = std(err)
Fehler_Einfache_Differenz = std(err)
plot(xd,err,'r')
hold on
plot(xd,err,'r')
hold off
legend('Fehler Zentrale Diff.', 'Fehler Einfache Diff.')
  
```

% Mit Noise:

```

sigma = 0.02;
s =
% Standard Abweichung fuer Noise
% Random Noise: Generieren Sie einen
% Vektor mit Gauss-verteilttem Zufallsnoise
% (help randn hilft weiter)
% Addiere Noise zur Sinus Funktion
% Einfache Differenz
% Zentrale Differenz
  
```

```

YS = Y + s;
dys = diff(ys) / delta;
cys = cdiff(ys,delta);

figure(2)
subplot(3,1,1)
plot(x,ys,'g')
axis([0,2*pi,min(ys),max(ys)])
legend('Sinus(x) + Noise')
  
```

```

subplot(3,1,2)
plot(x,cos(x))
hold on
plot(x,cys,'c')
plot(xd,dys,'r')
hold off
axis([0,2*pi,min(dys),max(dys)])
legend('Cosinus(x)', 'Zentrale Diff.', 'Einfache Diff.')
  
```

```

subplot(3,1,3)
Noise_in_Daten = std(s)
plot(x,s)
hold on
err = cos(x)-cys;
Fehler_Zentrale_Differenz = std(err)
plot(x,err,'c')
err = cos(xd)-dys;
Fehler_Einfache_Differenz = std(err)
plot(xd,err,'r')
hold off
axis([0,2*pi,min(err),max(err)])
legend('Noise', 'Fehler Zentrale Diff.', 'Fehler Einfache Diff.')
  
```

Notieren Sie sich die berechneten Standardfehler mit und ohne Noise und wiederholen Sie diese Ubung mit einer anderen Anzahl Werte (z.Bsp. n = 100) und vergleichen Sie die erhaltenen Standardfehler.

Frage: Koennen Sie sich die Unterschiede erklaren? (Tipp: wie veraendert sich die Nyquistfrequenz in Abhaengigkeit von n und wie koennte man die Ableitung mit der FFT berechnen und was hat das fuer Konsequenzen fuer den Frequenzgehalt der Ableitung einer Zeitreihe, die aus mehr als einer einzigen Frequenz besteht?

Zusatzaufgabe: Untersuchen Sie das Verhalten der numerischen Integration mit und ohne Noise unter Verwendung der Matlab-Funktion cumtrapz(x,y).

## Zeitreihenanalyse in der Geophysik - Uebung SS03

### Eichsignal und Frequenzantwort eines Seismometers

Die Gleichung des Eichsignals lautet:

$$\dot{y}(t) = \frac{a_c}{\sqrt{1 - \xi^2}} e^{-\xi \omega_0 t} \sin(\sqrt{1 - \xi^2} \omega_0 t). \quad (1)$$

Sie beschreibt das geschwindigkeitsproportionale Signal,  $\dot{y}(t)$ , am Ausgang eines Seismometers, welches durch einen Sprung in der Beschleunigung,  $a_c$ , angeregt wurde. Dabei ist  $\xi$  die Dämpfung als Verhältnis zur kritischen Dämpfung, und  $\omega_0 = 2\pi f_0$  die Eigenfrequenz des Seismometers.

**Gesucht:** Die Impuls- und Frequenzantwort des Seismometers.

#### Theoretischer Nachweis

Zeigen Sie theoretisch, dass das Eichsignal zweimal abgeleitet werden muss, um die Impulsantwort, bzw. im Frequenzbereich die Frequenzantwort (auch Übertragungsfunktion genannt) zu erhalten.

**Tipp:** Sie können natürlich Gleichung (1) ableiten. Einfacher und anschaulicher ist es aber wenn Sie von der allgemeinen Definition der Frequenzantwort, bzw. Übertragungsfunktion, ausgehen:

$$H(\omega) = \frac{Y(\omega)}{X(\omega)} = \frac{\mathcal{F}\{y(t)\}}{\mathcal{F}\{x(t)\}}.$$

$$s Y(s) = \frac{a_c}{s^2 + 2\xi s + \omega_0^2} = \mathcal{L}\{\dot{y}(t)\}$$

$$X(s) = \frac{a_c}{s^3} = \mathcal{L}\{x(t)\}$$

Somit gilt auch

$$H(\omega) = \frac{\mathcal{F}\{\ddot{y}(t)\}}{\mathcal{F}\{\ddot{x}(t)\}}.$$

$$\sim \mathcal{L}\{\ddot{y}(t)\} = \dots$$
$$\mathcal{L}\{\ddot{x}(t)\} = \dots$$

Der gesuchte Beweis ergibt sich dann durch Anwendung der Regeln für die Fourier Transformation des Integrals und der Ableitung einer Funktion sowie der Beziehung zwischen dem  $\delta$ -Impuls und der Schrittfunktion (auch Sprungfunktion genannt).

Können Sie nun das Vorgehen mit wenigen Worten begründen?

#### Berechnung der analytischen Impulsantwort mit MATLAB

Programmieren Sie Gleichung (1) in MATLAB und zeigen Sie, dass die Fourier Transformation dieses Eichsignals nicht der Frequenzantwort des Seismometers entspricht. Leiten Sie das Eichsignal zweimal numerisch ab und zeigen Sie dass die Fourier Transformation dieser zweimal abgeleiteten Funktion tatsächlich der gesuchten Frequenzantwort entspricht.

Wiederholen Sie dies für verschiedene Werte von  $\xi$  und  $f_0$  und beachten Sie, wie diese zwei Parameter das Verhalten des Seismometers bestimmen.

#### Analyse eines gemessenen Eichsignals

Probieren Sie das Gleiche mit einem gemessenen Eichsignal. Können Sie sich die Unterschiede zum theoretischen Signal erklären?

```

% Anleitung zur Uebung Eichsignal eines Seismometers (SS03):
% =====
% Kopieren Sie das M-file fuer diese Uebung mit
cp /afs/ethz.ch/users/d/deichman/zr/ss03/aufgabe.m
% und ergaenzen Sie die entsprechenden Befehle.

% Analytisches Eichsignal:
% -----
% Abtastrate, Zeit und Frequenzvektoren definieren

srate = 100;
deltat = 1/srate;
n = 1024;
t = linspace(0, (n-1)*deltat, n);

% Berechnen und zeichnen des Eichsignals:
% Dies ist der Geschwindigkeitsausgang als Antwort auf eine
% Schrittfunktion in der Beschleunigung!

ac = 1; % Beschleunigung durch Eichspule
xi = 0.6; % Dampfung
f0 = 1; % Eigenfrequenz
w0 = 2*pi*f0;
v = (ac / (sqrt(1-xi^2)*w0)) * (exp(-xi*w0*t));
V = v .* (sin(sqrt(1-xi^2)*w0*t));

% Bemerkung: v wird hier nur wegen der Zeilenlaenge in 2 Schritten
% berechnet;
% Ueberlegen Sie sich, warum die Multiplikation auf der
% zweiten Zeile mit .* statt nur mit * bezeichnet ist.
% Diesen Abschnitt werden Sie in einer spaeteren Uebung
% nochmals benoetigen.

% Wegen der folgenden zweimaligen numerischen Ableitung muss
% das signal um zwei stuetzwerte nach rechts verschoben werden

v(3:n) = v(1:n-2);
v(1:2) = [0 0];
subplot(2,2,1)
plot(t(1:201), v(1:201))
title('Eichsignal')
xlabel('Zeit (s)')

% Berechnung des Amplitudenspektrums des Eichsignals

```

```

nf = ; % Anzahl unabhaengiger Werte der FFT
f = ; % Frequenzvektor fuer Spektrum
V = ; % Fourier Transformation: Achtung auf Normierung!
subplot(2,2,2)
loglog(f, abs(V(1:nf)))
title('Amplitudenspektrum')
xlabel('Frequenz (Hz)')

```

```

% Zweimalige Ableitung des Eichsignals ergibt die
% Impulsantwort des Seismometers

```

```

Y = diff(v)/deltat;
y = diff(y)/deltat;
subplot(2,2,3)
plot(t(2:50), Y(1:49))
title('Impulsantwort')
xlabel('Zeit (s)')

```

```

% Fourier Transformation der Impulsantwort ergibt die
% Frequenzantwort des Seismometers

```

```

Y = deltat * fft(y);
subplot(2,2,4)
loglog(f, abs(Y(1:nf)))
title('Frequenzantwort')
xlabel('Frequenz (Hz)')

```

```

% Als Alternative, kann man die Frequenzantwort auch direkt
% im Frequenzbereich berechnen (Fourier Transformation der
% Ableitung einer Funktion):

```

```

% loglog(f, (4*(pi^2)*f.^2).*abs(V(1:nf)))

```

```

% Wiederholen Sie diese Prozedur fuer andere Werte von f0 und xi
% -----

```

```

% Ueberpruefen Sie das Ganze an einem tatsaechlich gemessenen
% Eichsignal.
% -----
% Laden Sie das Signal mit:

```

```

v = load ('/afs/ethz.ch/users/d/deichman/signals/caldat');
v = v';

```

```

% Die Abtastrate betraegt 100 Hz und das Signal
% besteht aus 1024 Punkten.
% Beim zeichnen des gemessenen Eichsignals muessen Sie darauf
% achten, dass es erst nach dem Wert 740 anfaengt.

```

Zeitreihenanalyse in der Geophysik -- Uebung SS04

```

=====
Uebung: Pole und Nullstellen in der s-Ebene
-----

% Aufgabel: Untersuchen Sie die Lage der Pole und Nullstellen
% der Uebertragungsfunktion des Seismometers fuer verschiedene
% Werte der Eigenfrequenz und Daempfung.

clear

% Definiere Eigenfrequenz und Daempfung
f0 = 0.1;
xi = 0.7;
w0 = 2*pi*f0;

% Aufruf von zplane mit Polen und Nullstellen (Spaltenvektoren!)
%
x = -w0*xi;
y = -w0*sqrt(1-xi*xi);
pol = [x-j*y;x+j*y];
zer = [0;0];
subplot(1,2,1)
zplane(zer,pol)

% Aufruf von zplane mit Koeffizienten der Uebertragungsfunktion
% (Zeilenvektoren!)
num = [1 0 0]
den = [1 2*xi*w0 w0*w0]
subplot(1,2,2)
zplane(num,den)

% Aufgabe 2: Beispiel Seismometer Eichsignal; Untersuchen Sie
% die Beziehung der Pole und Nullstellen in der s-Ebene zur
% Signalform sowie zum Amplituden- und Phasen-Spektrum.
% In welchem Teil der s-Ebene liegen die Pole eines stabilen
% Systems? (Vergleichen Sie positive und negative Daempfungswerte.)

clear

% Pole und Nullstellen aus Koeffizienten der Uebertragungsfunktion
%
xi = 0.2;
f0 = 1;
w0 = 2*pi*f0;
num = ;
den = ; % Zaehler (nicht gleich wie Seismometer)
% Zaehler
% Denner

figure(1)
subplot(2,2,1)
zplane(roots(num), roots(den))

% Berechne und zeichne das Signal
%
srate = 100;
deltat = 1/srate;
n = 4096;
t = linspace(0, (n-1)*deltat, n);
ac = 1;
v = ac / (sqrt(1-xi^2)*w0)) * (exp(-xi*w0*t));
v = v .* (sin(sqrt(1-xi^2)*w0*t));

subplot(2,2,2)
plot(t(1:400), v(1:400))
xlabel('Zeit (s)')

% Berechne Frequenzantwort aus Fourier Transformation
%
nfft = 4096;
% zero-padding fuer FFT
nf = ; % Anzahl Frequenzwerte fuer Vektor f
f = ; % Frequenzvektor
V = ; % FFT von v mit zero-padding

% Amplitudenspektrum
%
subplot(2,2,3)
loglog(
axis([0.01 100 1e-5 1e-1])
% Amplitude bis zur Nyquistfreq.
% fuer xi = 0.2
% fuer xi = -0.2
xlabel('Frequenz (Hz)')
ylabel('Betrag')

% Phasenspektrum
%
subplot(2,2,4)
semilogx(
xlabel('Frequenz (Hz)')
ylabel('Phase (PI)')
) % Phase als Vielfache von PI

% Berechne und zeichne Frequenzantwort
% mit der Funktion freqs
%
figure(2)
freqs(num,den) % Frequenzachse als Kreisfrequenz

% Alternative fuer Frequenzachse in Hz
% und Phase in Vielfache von PI:
%
[H,w] = freqs(num,den); % w = omega
figure(3)
subplot(2,1,1)
loglog(
% Amplitude als Funktion von Hz
Grid
xlabel('Frequenz (Hz)')
ylabel('Betrag')

subplot(2,1,2)
semilogx(
% Phase als Vielfache von PI
Grid
xlabel('Frequenz (Hz)')
ylabel('Phase (PI)')
)

```



Zeitreihenanalyse in der Geophysik -- Übung SS06  
 =====

Untersuchen Sie das Verhalten der Impulsantwort und des Frequenzgangs von Butterworth Tiefpassfiltern verschiedener Ordnung. Vergleichen Sie kausale und akasale Filter.

Die akasalen Filter werden auch linear- oder nullphasige Filters genannt. Die Filterkoeffizienten koennen mit der Funktion butter berechnet werden. Zur Berechnung der Impulsantwort, genuengt es einen Einheitsimpuls mit der Funktion filter (kausal) oder filtfilt (akasal) zu filtern. Die Frequenzantwort erhaelt man dann mittels FFT der Impulsantwort.

Frage 1: Eine zweimalige Filterung, einmal vorwaerts und einmal rueckwaerts (Matlab Funktion filtfilt), entspricht einer Filterung mit einem sogenannten linear- oder nullphasigem Filter: warum?

Frage 2: Was fuer angenehme und unangenehme Eigenschaften hat die Impulsantwort eines nullphasigen Filters?  
 Bemerkung: Zum Vergleich des Phasenverhaltens der Filter, muss fuer die von Null verschiedene Position des Einheitsimpulses korrigiert werden. (Tipp: Verschiebungssatz der Fourier Transformation). Versuchen Sie es erst ohne Korrektur.

Frage 3: Wie veraendert sich die Laenge der Impulsantwort als Funktion der Ordnung?

Anleitung (File /afs/ethz.ch/users/d/deichman/zr/ss06/aufgabe.m):  
 -----

```
% Impulsantwort und Frequenzgang eines Butterworth Filters:
% Vergleich Kausal / Akasal
%
clear
% Definiere Ordnung und Eckfrequenz des Filters:
%
ordnung = 2;
fc = 10;
% Filterordnung
% Eckfrequenz (Hz)

% Definiere Delta-Impuls
%
rate = 100;
deltat = 1/rate;
n = 101;
t = linspace(0, (n-1)*deltat, n); % Anzahl Punkte der Zeitreihe
x = zeros(1, n);
nshift = 50;
x(1, 1+nshift) = rate; % Position des Delta-Impulses
% Definition des Delta-Impulses
```

```
% Definiere Parameter fuer FFT
%
nfft = 512; % Anzahl Punkte fuer FFT
nf = nfft/2 + 1;
fnyq = sr/2;
f = linspace(0, fnyq, nf); % Frequenzvektor

% Berechne Phasenverschiebung wegen Position des Impulses:
% (siehe Berechnung der Phase weiter unten)
%
phaseshift = ;

% Berechne Koeffizienten des kausalen Filters
%
[a b] = butter(ordnung, fc/fnyq); % kausale Filterung
y = filter(a, b, x);

figure(1)
subplot(2, 2, 1)
plot(t, x, 'r')
hold on
plot(t, y)
title('Tiefpass 10 Hz 2. Ord. kausal')
hold off

% Berechne Frequenzgang
%
figure(2)
subplot(2, 2, 1)
H = deltat * fft(y, nfft);
loglog(f, abs(H(1:nf)))
xlabel('Frequenz (Hz)')
ylabel('Amplitude')
axis([1e-1 1e2 1e-4 1e1])
subplot(2, 2, 3)
phase = unwrap(angle(H(1:nf))); % Unkorrigiert
%phase = unwrap(angle(phaseshift .* H(1:nf))); % Korrigiert
plot(f, phase/pi)
xlabel('Frequenz (Hz)')
ylabel('Phase (pi)')

% Berechne Koeffizienten des akasalen Filters
%
[a b] = butter(ordnung/2, fc/fnyq); % Akasale Filterung
y = filtfilt(a, b, x);
```

(Weiter wie fuer das kausale Filter)



Zeitreihenanalyse in der Geophysik -- Übung SS07  
 =====

Frequenzselektive Filterung von Seismogrammen.

Im Directory /afs/ethz.ch/users/d/deichman/zr/ss07/ sind das M-File aufgabe.m sowie die vier seismogramme eines kleinen Bebens in der Nordschweiz enthalten (signal1,...,signal4). Kopieren Sie sich das M-File in Ihr Arbeitsdirectory.

Aufgabe 1:

Filtern Sie signal1 mit einem Butterworth Bandpassfilter vierter Ordnung zwischen 2 und 10 Hz, einmal kausal und einmal akausal -- vergleichen Sie die zwei gefilterten Signale. Verwenden Sie dazu das M-File aufgabe.m.

Aufgabe 2:

Wiederholen Sie Aufgabe 1 mit signal3, aber mit einem Bandpassfilter 8. Ordnung zwischen 4 und 16 Hz. Vergleichen Sie das Resultat anhand des P-Wellen Einsatzes, indem sie die zwei gefilterten Signale (von Wert 301 bis 500) uebereinander zeichnen. Modifizieren Sie das M-File aufgabe.m entsprechend.

Aufgabe 3:

Die beiden Seismogramme signal2 und signal4 sind so stark gestoert, das man die P-Einsatze nicht erkennen kann. Versuchen Sie ein frequenzselektives Filter zu entwerfen (hochpass, tiefpass oder bandpass), das den Noise unterdrueckt und so viel wie moeglich vom Signal durchlaesst. Zur Hilfe koennen Sie vorher Fourier Amplitudenspektrum berechnen von einem Abschnitt, in dem Sie nur Noise vermuten, und von einem Abschnitt, in dem Sie auch noch Nutzsignal vermuten. Der Vergleich der beiden Spektren kann Ihnen helfen, die Eckfrequenzen der Filter richtig zu waelhen. Modifizieren Sie das M-File aufgabe.m, indem Sie die entsprechenden Befehle fuer die FFT hinzufuegen (Tipp: die zwei zu vergleichenden Signalabschnitte sollten die gleiche laenge haben; stellen Sie die Amplitudenspektren mit linearen Achsen dar).

```
M-File aufgabe.m:
-----
% Bandpass-Filterung eines Seismogramms (signal1)
% mit akausalem und kausalem Filter

% Einlesen der Daten:
%
x = load('/afs/ethz.ch/users/d/deichman/zr/ss07/signal1')
% Definieren der Filter Parameter:
%
ordnung = ; % Ordnung des Filters
hp = ; % Hochpass-Eckfrequenz (Hz)
tp = ; % Tiefpass-Eckfrequenz (Hz)

% Definiere Anzahl Werte und Abtastrate der Signale:
%
n = 2048;
srate = 100;
deltat = 1/srate;
fnyq = srate/2;
t = linspace(0, (n-1)*deltat,n); % Zeitvektor

% Zeichne ungefiltertes Signal
%
subplot(3,1,1)
plot (t,x)
axis ([min(t),max(t),min(x),max(x)])
title ('Signal 1')

% Akausales Filter
%
subplot(3,1,2)
[a b] = butter(ordnung/2, hp/fnyq, 'high');
y = filtfilt(a,b,x);
[a b] = butter(ordnung/2, tp/fnyq);
y = filtfilt(a,b,y);
plot (t,y)
axis ([min(t),max(t),min(y),max(y)])

% Kausales Filter
%
subplot(3,1,3)
[a b] = butter(ordnung_hp/fnyq, 'high');
y = filter(a,b,x);
[a b] = butter(ordnung_tp/fnyq);
y = filter(a,b,y);
plot (t,y)
axis ([min(t),max(t),min(y),max(y)])
xlabel ('Zeit (s)')
```

Zeitreihenanalyse in der Geophysik -- Übung SS08

Vergleich verschiedener Realisierungen eines diskreten Butterworth Tiefpassfilters 2. Ordnung.

1) Berechnen Sie die Koeffizienten der diskreten Übertragungsfunktion, bzw der Differenzengleichung aus der Lösung der bilinearen Transformation, unter Berücksichtigung der Frequenzverzerrung (prewarping).

2) Vergewissern Sie sich, dass Ihre Koeffizienten mit denjenigen der Matlab Routine butter übereinstimmen.

3) Vergleichen Sie Frequenzgang und Impulsantwort aus Ihrer Lösung der bilinearen Transformation sowie aus der diskreten Realisierung des Butterworth Filters mittels Ruckwaertsdifferenzen, zentraler Differenzen und Impulsinvarianz mit der analytischen Lösungen fuer verschiedene Kombinationen von Abtastfrequenz und Eckfrequenz des Filters.

4) Frage: Welche Methode wuerden Sie fuer welche Anwendungen bevorzugen?

Anleitung (File /afs/ethz.ch/users/d/deichman/zr/ss08/aufgabe.m) :  
 Kopieren Sie sich obiges File und ergaenzen Sie die Koeffizienten der verschiedenen diskreten Filter aus den Beilagen oder aus Ihren eigenen Berechnungen.

Zur Beantwortung von 4, koennen Sie auch versuchen die Spektralveraeiltnisse zwischen den Resultaten der verschiedenen Methoden und der analytischen Loesung zu berechnen und darzustellen. bzw die Differenzen der entsprechenden Impulsantworten.

% Vergleich der Impuls- und Frequenzantwort von diskreten  
 % Realisierungen eines Butterworth Tiefpassfilters 2. Ordnung  
 % mit der analytischen Loesung.  
 % Die analytische Impulsantwort ist h.  
 % Die diskreten Realisierungen sind:  
 % Y1: Ruckwaertsdifferenzen  
 % Y2: zentrale Differenzen  
 % Y3: Impulsinvarianz  
 % Y4: Bilineare Transformation

```
clear
% Eckfrequenz, Abtastrate und Zeitvektor definieren
%
f0 = 5; % Eckfrequenz des Filters
srate = 100; % Abtastrate (Hz)
T = 1/srate;
n = 2 * srate / f0 + 1; % Anzahl Punkte fuer die
Impulsantwort
t = linspace(0, (n-1)*T, n);

% Berechne und zeichne den analytischen Frequenzgang
%
w0 = 2*pi*f0;
a = w0^2;
b = [1 w0*sqrt(2) w0^2];
f = logspace(-2,2);
H = freqs(a,b,2*pi*f);
subplot(2,2,1)
loglog(f,abs(H))
title('Frequenzgang')
% xlabel('Frequenz (Hz)')
axis([0.01 100 0.01 1])

% Berechne und zeichne die analytischen Impulsantwort
%
xi = sqrt(2)/2;
h = 2 * xi * w0 * exp(-xi*w0*t) .* sin(xi*w0*t);
subplot(2,2,2)
plot(t,h)
title('Impulsantwort')
% xlabel('Zeit (s)')

% Definiere Einheitsimpuls
%
u = zeros(1,n);
u(1,1) = 1/T;

% Diskrete Uebertragungsfunktion (Z-Transformation)
% aus der Loesung der Differenzengleichung mittels
% einfacher Differenzen
%
a0 = ;
b0 = ;
b1 = ;
b2 = ;
a = [a0];
b = [b0 b1 b2];
[Y1 ff] = freqz(a,b,1024, srate);
subplot(2,2,1)
hold on
loglog(ff,abs(Y1),'r')
hold off
```

```

% Berechne und zeichne das diskrete Signal
%
y1 = filter(a,b,u);
subplot(2,2,2)
hold on
plot(t,y1,'r')
hold off

% Diskrete Übertragungsfunktion (Z-Transformation)
% aus der Lösung der Differenzgleichung mittels
% zentraler Differenzen
a0 = ;
a1 = ;
b0 = ;
b1 = ;
b2 = ;
a = [a0 a1];
b = [b0 b1 b2];
[y2 ff] = freqz(a,b,1024,srate);
subplot(2,2,1)
hold on
loglog(ff,abs(Y2),'g')
hold off

% Berechne und zeichne das diskrete Signal
%
y2 = filter(a,b,u);
subplot(2,2,2)
hold on
plot(t,y2,'g')
hold off

% zeichne den analytischen Frequenzgang
%
subplot(2,2,3)
loglog(f,abs(H))
axis([0.01 100 0.01 1])
% title('Frequenzgang')
xlabel('Frequenz (Hz)')

% zeichne die analytischen Impulsantwort
%
xi = sqrt(2)/2;
h = 2 * xi * w0 * exp(-xi*w0*t) .* sin(xi*w0*t);
subplot(2,2,4)
plot(t,h)
% title('Impulsantwort')
xlabel('Zeit (s)')

% Diskrete Übertragungsfunktion (Z-Transformation)
% aus Impulsinvarianz
%
a0 = ;
a1 = ;
b0 = ;
b1 = ;
b2 = ;
a = [a0 a1];
b = [b0 b1 b2];
[y3 ff] = freqz(a,b,1024,srate);
subplot(2,2,3)
hold on
loglog(ff,abs(Y3),'g')
hold off

% Berechne und zeichne das diskrete Signal
%
y3 = filter(a,b,u);
subplot(2,2,4)
hold on
plot(t,y3,'g')
hold off

% Diskrete Übertragungsfunktion (Z-Transformation)
% aus bilinearer Transformation
%
wc = ;
a0 = ;
a1 = ;
a2 = ;
b0 = ;
b1 = ;
b2 = ;
a = [a0 a1 a2];
b = [b0 b1 b2];
[y4 ff] = freqz(a,b,1024,srate);
subplot(2,2,3)
hold on
loglog(ff,abs(Y4),'r')
hold off

% Berechne und zeichne das diskrete Signal
%
y4 = filter(a,b,u);
subplot(2,2,4)
hold on
plot(t,y4,'r')
hold off

```

## Zeitreihenanalyse in der Geophysik - Uebung SS09

Gegeben sei ein synthetisches geschwindigkeitsproportionales Seismogramm einer SH-Welle, das von einem kurzperiodischen Seismographen "registriert" wurde. Mittels der Impulsantwort des gesamten Aufnehmer Systems, soll durch inverse Filterung im Frequenzbereich das korrigierte Amplitudenspektrum und das Quellsignal berechnet werden. Von diesen soll dann das seismische Moment des Erdbebens bestimmt werden. Dabei können Sie die folgenden Parameter zur Berechnung des Skalierungsfaktors annehmen:

$$\begin{aligned}r &= 10 \text{ km} \\ \rho_{\xi} &= 2.7 \cdot 10^3 \text{ kg/m}^3 \\ \rho_x &= 2.5 \cdot 10^3 \text{ kg/m}^3 \\ \beta_{\xi} &= 3.5 \cdot 10^3 \text{ m/s} \\ \beta_x &= 2.5 \cdot 10^3 \text{ m/s} \\ F^{SH} &= 1 \\ S^{SH} &= 2\end{aligned}$$

Verifizieren Sie, ob im Zeit- und Frequenzbereich das gleiche Resultat erhalten wird. Versuchen Sie es erst ohne Noise, dann addieren Sie Noise unterschiedlicher Amplitude zum Signal.

Das MATLAB Skript befindet sich in  
</afs/ethz.ch/users/d/deichman/zr/ss09/aufgabe.m>

```

Zeitreihenanalyse in der Geophysik -- Uebung SS09
=====

```

```

% Instrumentenkorrektur eines synthetischen SH-Seismogramms
% durch Spektraldivision.
% -----

```

```

% Signalparameter definieren
%

```

```

clear
n = 256;
srate = 100;
dt = 1./srate;
t = linspace(0, (n-1)*dt, n);
nfft = 256;
nf = nfft/2;
f = linspace(0, srate/2, nf);

```

```

% Einlesen und zeichnen des Seismogramms
%

```

```

load /afs/ethz.ch/users/d/deichman/zr/ss09/sig.sh
Z = sig; % ohne noise
%noise = 100000 * randn(n,1); % noise generieren
%z = sig+noise; % mit noise
figure(1)
clf
plot(t,z)
xlabel('Zeit (s)')

```

```

% Spektrum des Signals
%

```

```

Z = ; % Korrekt skaliertes Spektrum
figure(2)
clf
loglog(f,abs(Z(1:nf)))
xlabel('Frequenz (Hz)')
ylabel(' (nm/s/Hz)')

```

```

% Einlesen der Impulsantwort und Berechnung der Frequenzantwort
%

```

```

load /afs/ethz.ch/users/d/deichman/zr/ss09/h.2
%
H = ; % Frequenzantwort
figure(3)
clf
loglog(f,abs(H(1:nf)))

```

```

% Instrumentenkorrektur durch Spektraldivision
%
figure(4)
clf
spectrat = ; % Spektraldivision
loglog(f,abs(spectrat(1:nf)))

```

```

% Vergleich mit simpler Integration
%

```

```

hold on
AZ = abs(Z(2:nf))./(2*pi*f(2:nf)); % f(1) = 0 !
loglog(f(2:nf),AZ,'r')
axis([0.1,100,100,1000000])
grid
xlabel('Frequenz (Hz)')
ylabel(' (nm/Hz)')
hold off

```

```

% Quellsignal aus IFFT des korrigierten Spektrums
%

```

```

figure(5)
clf
Y = Y - Y(1); % korrekt skalierte IFFT
plot(t,real(Y))
xlabel('Zeit (s)')
dt * sum(real(Y(1:50))) % Flaeche unter Quellsignal

```

Zeitreihenanalyse in der Geophysik -- Übung SS10

Antwortspektren

Kopieren Sie sich die M-Files im Directory /afs/ethz.ch/users/d/deichman/zr/ss10/ in Ihr Arbeitsverzeichnis. (mit dem Befehl cp /afs/ethz.ch/users/d/deichman/zr/ss10/\*.\*.)

Verwenden Sie für die Bearbeitung der nachfolgenden Fragen die Matlab Skripte uebung1.m, uebung2.m sowie uebung3.m und versuchen Sie zu verstehen, wie sie funktionieren.

Die Daten sind in den Files bern1.x, bern1.y, pgall.x, pgall.y, scuol.x, scuol.y, zernez.x und zernez.y und enthalten die Horizontalkomponenten von Beschleunigungsregistrierungen des Magnitude 4.9 Bebens vom 29/12/1999 zwischen Münstertal und Bormio im Veltlin.

Epizentralentfernungen:

pgall (Stausee Punt dal Gall): 11 km

zernez: 23 km

scuol: 26 km

bern1 (Berninapass -- Breitbandstation): 27 km.

Die Daten werden in den M-Files direkt eingelesen, Sie müssen sie nicht vorher kopieren, sondern nur die Namen im load Befehl ändern. (Achtung: Diese Signale haben alle die gleiche Anzahl Punkte, aber unterschiedliche Abtastraten!)

1. Wählen Sie sich eines der Signale aus und berechnen Sie die Antwortspektren für Verschiebung, Geschwindigkeit, Pseudogeschwindigkeit, Beschleunigung und Pseudobeschleunigung.

2. Vergleichen Sie Fourier und Antwortspektren der Beschleunigung bzw. Pseudobeschleunigung.

3. Gibt es einen direkten Weg das Antwortspektrum aus dem Fourier Amplitudenspektrum zu berechnen? Was könnten Sie ausprobieren, um diese Frage zu beantworten? (Tipp: Wenn Sie nicht weiter kommen, schauen Sie sich das Skript uebung3.m an und versuchen Sie zu verstehen, was darin abläuft).

4. Vergleichen Sie die Antwortspektren an den vier verschiedenen Standorten mit den STA Bemessungsspektren für die Zone 2: Hat das Beben an den Orten ein Schadenspotential gehabt? An welchem Standort ist der Untergrund weich und an welchem steif?

uebung1.m:

```
-----
% Plot accelerogram;
% calculate and plot response spectra of displacement, velocity,
% pseudovelocity, acceleration and pseudoacceleration.
%
clear
% load sig
sig = load('/afs/ethz.ch/users/d/deichman/zr/ss10/zernez.x');
x = sig * 1e-9; % convert nm/s^2 to m/s^2
xi = 0.05; % damping
% rate = 120; % set sampling rate for bern1
rate = 128; % set sampling rate for scuol and zernez
% rate = 200; % set sampling rate for pgall
T = 1/rate; % sampling interval
%
% plot signal
%
n = length(x);
t = linspace(0, (n-1)*T, n);
figure(1)
clf
subplot(2,1,1)
plot(t,x)
xlabel('Zeit (s)')
ylabel('(m/s^2)')
%
% set frequency vector for response spectrum
%
f1 = 0.1;
f2 = rate*0.3;
ndec = 50;
nf = fix(1 + (log10(f2) - log10(f1)) * ndec);
f = logspace(log10(f1),log10(f2),nf); % frequencies for resp. spec.
%
```

```
% solve difference equation for each frequency
```

```
%
TT = T*T ;
TT = T+T ;
C = xi*T ;
a0 = 0 ;
a1 = -T2 ;
for ii = 1:nf
    w = 2*pi*f(ii) ;
    w2 = w^2 ;
    b0 = 1 + C*w ;
    b1 = w2*T2 - 2 ;
    b2 = 1 - C*w ;
    a = [a0 a1] ;
    b = [b0 b1 b2] ;
    a = a./b0 ;
    b = b./b0 ;
    Y = filter(a,b,x) ;
    YY = filter([1/(TT) 0 -1/(TT)], [1], Y) ;
    YYY = filter([1/T2 -2/T2 1/T2], [1], Y) ;
    YYY(2:n) = YYY(2:n) + x(1:(n-1)) ;
    Sd(ii) = max(abs(Y)) ; % relative displacement
    Sv(ii) = max(abs(YY)) ; % relative velocity
    Sa(ii) = max(abs(YYY)) ; % absolute acceleration
    PSv(ii) = w*Sd(ii) ; % pseudo velocity
    PSA(ii) = w2*Sd(ii) ; % pseudo acceleration
end
```

```
% plot response spectra
```

```
%
figure (1)
subplot(2,1,2)
semilogx(f,Sd,'y')
title ('Antwortspektrum Verschiebung')
xlabel ('Frequenz (Hz)')
ylabel ('D (m)')
figure (2)
subplot(2,1,1)
semilogx(f,Sv,'y')
title ('Antwortspektrum Geschwindigkeit')
xlabel ('Frequenz (Hz)')
ylabel ('V (m/s)')
hold on
semilogx(f,PSv,'r')
hold off
subplot(2,1,2)
semilogx(f,Sa,'y')
title ('Antwortspektrum Beschleunigung')
xlabel ('Frequenz (Hz)')
ylabel ('A (m/s^2)')
hold on
semilogx(f,PSa,'r')
hold off
```

3

```
uebung2.m:
-----
```

```
% Plot accelerogram and compare Fourier amplitude spectrum to
% acceleration response spectrum.
%
clear
% load sig
sig = load('/afs/ethz.ch/users/d/deichman/zr/ssl0/zernez.x');
% srate = 120; % set sampling rate for berni
% srate = 128; % set sampling rate for scuol and zernez
% srate = 200; % set sampling rate for pgall
T = 1/srate; % sampling interval
sig = sig * 1e-9; % convert nm/s^2 to m/s^2
-xi = 0.05 ; % damping
%
% nfft = 1024;
nfft = 2048;
nft = nfft/2 + 1;
% n = length(sig);
% x = sig;
% x(n+1:nfft) = zeros(nfft-n,1);
n = nfft;
x = sig(1:n);
%
% plot signal
t = linspace(0, (n-1)*T, n); % time vector
figure(1)
clf
subplot(3,1,1)
plot(t,x,'b')
xlabel('Zeit, (s)')
%
% calculate fourier spectrum
%
ff = linspace(0, srate/2, nfft); % frequencies for FFT
X = fft(x, nfft);
% X1 = abs(X(1:(nfft/2)+1));
% X2 = flipud(X1);
%
% set frequency vector for response spectrum
%
f1 = 0.1;
f2 = srate*0.3;
ndec = 50;
nf = fix(1 + (log10(f2) - log10(f1)) * ndec);
fa = logspace(log10(f1), log10(f2), nf); % frequencies for resp. spec.
```

4

```
% solve difference equation for each frequency
```

```
%
T2 = T*T ;
TT = T+T ;
C = xi*T ;
a0 = 0 ;
a1 = -T2 ;
for ii = 1:nf
    w = 2*pi*fa(ii) ;
    w2 = w^2 ;
    b0 = 1 + c*w ;
    b1 = w2*T2 - 2 ;
    b2 = 1 - c*w ;
    a = [a0 a1] ;
    b = [b0 b1 b2] ;
    a = a./b0 ;
    b = b./b0 ;
    y = filter(a,b,x) ;
    psa(ii) = w2 * max(abs(y)) ; % pseudo acceleration
end
%
figure(1)
subplot(3,1,2)
A = T*abs(X(1:nft));
semilogx(ff,A,'b') % plot fourier amplitude spectrum
axis([0.1,100,0,max(A)])
title('Fourier Amplitudenspektrum')
xlabel('Frequenz (Hz)')
ylabel('(m/s^2/Hz)')
%
figure(1)
subplot(3,1,3)
semilogx(fa,PSa,'b')
title('Antwortspektrum, 5% Daempfung') % plot SPA spectrum
xlabel('Frequenz (Hz)')
ylabel('SPA (m/s^2)')
```

```
uebung3.m:
-----
```

```
% Plot accelerometer and calculate and plot Fourier amplitude
% and response spectrum.
% Generate random signals with same Fourier amplitude spectrum
% as observed accelerometer and calculate and plot the corresponding
% response spectra.
%
clear
% load sig
sig = load('/afs/ethz.ch/users/d/deichman/zr/ss10/zernez.x');
% rate = 120; % set sampling rate for berni
rate = 128; % set sampling rate for scuol and zernez
% rate = 200; % set sampling rate for pfall
T = 1/srate ; % sampling interval
sig = sig * 1e-9; % convert nm/s^2 to m/s^2
xi = 0.05 ; % damping
%
% nfft = 1024;
nfft = 2048;
nft = nfft/2 + 1;
% n = length(sig);
% x = sig;
% x(n+1:nfft) = zeros(nfft-n,1);
n = nfft;
x = sig(1:n);
%
% plot signal
%
t = linspace(0,(n-1)*T,n); % time vector
figure(1)
clf
subplot(2,1,2)
plot(t,x,'b')
xlabel('Zeit, (s)')
subplot(2,1,1)
% calculate fourier spectrum
%
ff = linspace(0,srate/2,nft); % frequencies for FFT
X = fft(x,nfft);
% X1 = abs(X(1:(nfft/2)+1));
% X2 = flipud(X1);
%
% set frequency vector for response spectrum
%
f1 = 0.1;
f2 = srate*0.3;
ndec = 50;
nf = fix(1 + (log10(f2) - log10(f1)) * ndec);
fa = logspace(log10(f1),log10(f2),nf); % frequencies for resp. spec.
%
```



```

% generate signals with the same fourier amplitude spectrum
% but with random phase and calculate response spectra
%
nrandom = 2; % number of random-phase signals
for i=1:nrandom
    Z = fft(weiss(nfft));
    XZ(1:(nfft/2)+1) = Z(1:(nfft/2)+1) .* X1;
    XZ((nfft/2)+2:nfft) = Z((nfft/2)+2:nfft) .* X2(2:nfft/2);
    XZ = X.*Z;
    x = real(iffft(XZ));
    figure(1)
    plot(t,x)
%
T2 = T*T;
TT = T+T;
C = xi*T;
a0 = 0;
a1 = -T2;
for ii = 1:nf
    w = 2*pi*fa(ii);
    w2 = w^2;
    b0 = 1 + c*w;
    b1 = w2*T2 - 2;
    b2 = 1 - c*w;
    a = [a0 a1];
    b = [b0 b1 b2];
    a = a./b0;
    b = b./b0;
    y = filter(a,b,x);
    PSa(ii) = w2 * max(abs(y)); % pseudo acceleration
end
%
figure(2)
semilogx(ff,T*abs(XZ(1:nfft)), 'y') % plot fourier amplitude spectrum
semilogx(ff,abs(X(1:nfft)) - abs(XZ(1:nfft)), 'g') % plot difference
%
figure(3)
semilogx(fa,PSa, 'y') % plot spa spectrum
end

```

8

```

% solve difference equation for each frequency
%
T2 = T*T;
TT = T+T;
C = xi*T;
a0 = 0;
a1 = -T2;
for ii = 1:nf
    w = 2*pi*fa(ii);
    w2 = w^2;
    b0 = 1 + c*w;
    b1 = w2*T2 - 2;
    b2 = 1 - c*w;
    a = [a0 a1];
    b = [b0 b1 b2];
    a = a./b0;
    b = b./b0;
    y = filter(a,b,x);
    PSa(ii) = w2 * max(abs(y)); % pseudo acceleration
end
%
figure(2)
clf
A = T*abs(X(1:nfft));
semilogx(ff,A,'b') % plot fourier amplitude spectrum
axis([0.1,100,0,max(A)])
title('Fourier Amplitudenspektrum')
xlabel('Frequenz (Hz)')
ylabel('Amplitudendichte (m/s^2/Hz)')
hold on
%
figure(3)
clf
semilogx(fa,PSa,'b')
title('Antwortspektrum, 5% Dämpfung') % plot spa spectrum
xlabel('Frequenz (Hz)')
ylabel('SPA (m/s^2)')
hold on
%
% pause

```

7



## Uebung ss01: Auflösung und Dynamik

Gegeben ist ein Starkbebenmessgerät mit

- Dynamik: 12 Bit A/D-Wandler  $\Leftrightarrow \pm 2047$  counts,
- Maximale Beschleunigung:  $50\% \text{ g} = 0.5 \cdot \text{g} = 4.9 \text{ m/s}^2$ .

**Erste Frage:** Wie gross ist die Auflösung?

Die Auflösung entspricht dem Beschleunigungswert des kleinsten darstellbaren Wertes,  $l_{sb}$ , (least significant bit):

$$\begin{aligned}
 l_{sb} &= \text{Maximale Beschleunigung} / \text{Maximale Anzahl Counts} \\
 &= \frac{50\%}{2047} = 0.024\% \text{ g} \\
 &= \frac{4.9 \text{ m/s}^2}{2047 \text{ counts}} = 0.00239 \text{ (m/s}^2\text{)}/\text{count}
 \end{aligned}$$

**Zweite Frage:** Wie gross ist die Auflösung und die maximale Beschleunigung der Aufzeichnungen eines modernen Breitband-Seismometers?

Gegeben:

- Abtastrate des A/D-Wandlers: 120 Hz,
- Dynamik des A/D-Wandlers: 24 Bit  $\Leftrightarrow \pm 8'388'607$  counts,
- Auflösung des A/D-Wandlers:  $2.38 \mu\text{V}/\text{count}$ ,
- Empfindlichkeit des Seismometers:  $1500 \text{ Volt/m/s} = 1.5 \mu\text{V}/(\text{nm/s})$ .

Daraus folgt eine Auflösung der Boden-Schwingungsgeschwindigkeit von

$$2.38/1.5 = 1.587 \text{ (nm/s)}/\text{count}$$

und ein Maximalwert von  $13.3 \text{ mm/s}$ .

Der kleinste Beschleunigungswert,  $a_1$ , der aufgelöst werden kann, ergibt sich aus der numerischen Ableitung der Geschwindigkeit,  $v_1$ :

$$a_1 = \frac{v_1 - v_1 - 1}{T} = 1.587 \cdot 120 = 190.4 \text{ (nm/s}^2\text{)}/\text{count}$$

wobei  $T = 1/120$  das Abtastintervall in Sekunden ist.

Dann ist die theoretisch maximale Beschleunigung:

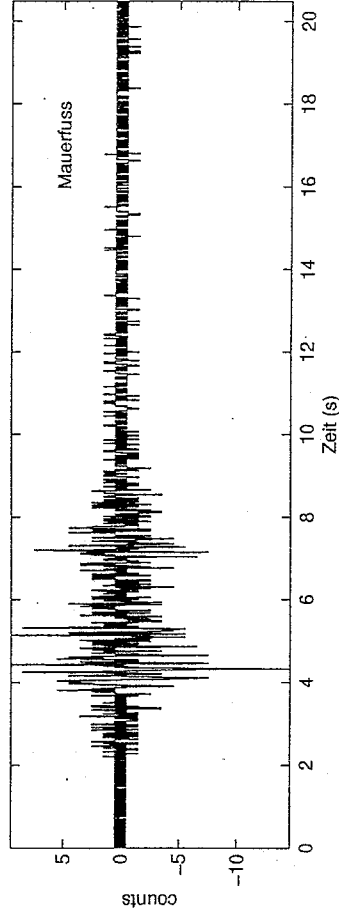
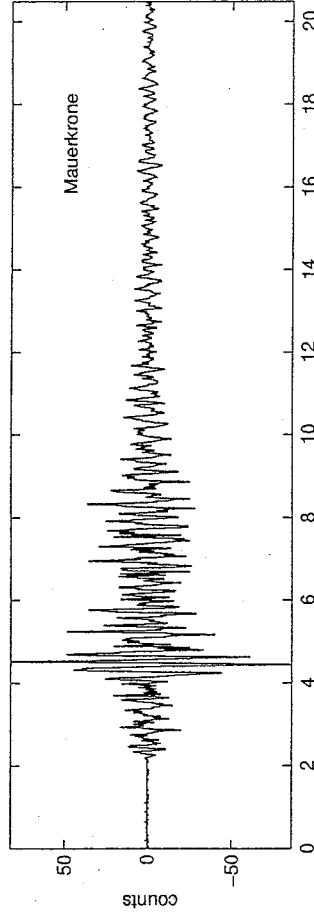
$$a_{max} = 2 \cdot 8388607 \cdot 190.4 \cdot 10^{-9} = 3.2 \text{ m/s}^2 \approx 33\% \text{ g}$$

In der Praxis wird dieser Wert nicht erreicht, da dies bedeuten würde, dass so ein Breitband-Seismograph alle Frequenzen bis zur Nyquist-Frequenz verzerrungsfrei aufzeichnen müsste: Tatsächlich kommt er einfach nicht schnell genug nach.

**Dritte Frage:** Was waren die maximalen gemessenen Beschleunigungen, PGA (Peak Ground Acceleration) am Mauerfuss und auf der Mauerkrone? Aus der Darstellung der Signale und der maximalen Beträge sehen wir, dass die Maximalwerte am Mauerfuss  $14.5$  counts und auf der Krone  $86$  counts erreichten (die nicht-ganzzahligen Werte kommen daher, dass wir von jedem Signal den entsprechenden Mittelwert abgezogen haben). Somit erhalten wir:

$$\text{PGA (Mauerfuss)} = 0.024 \cdot 14.5 = 0.35\% \text{ g}$$

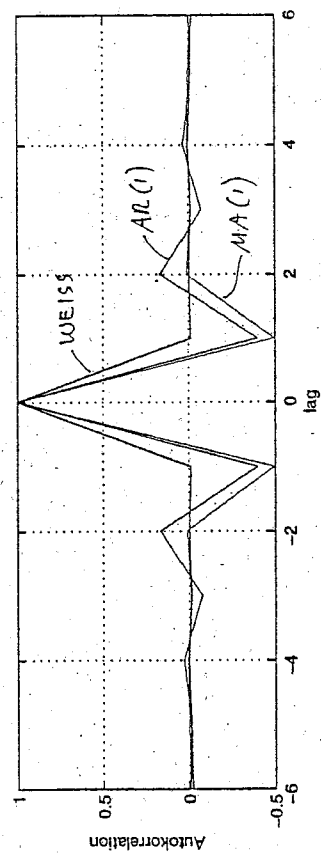
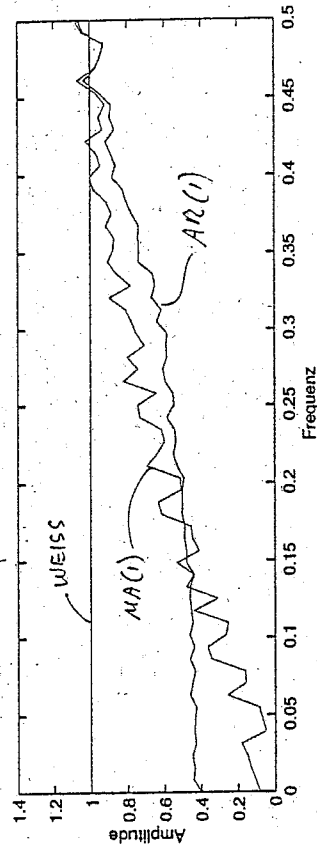
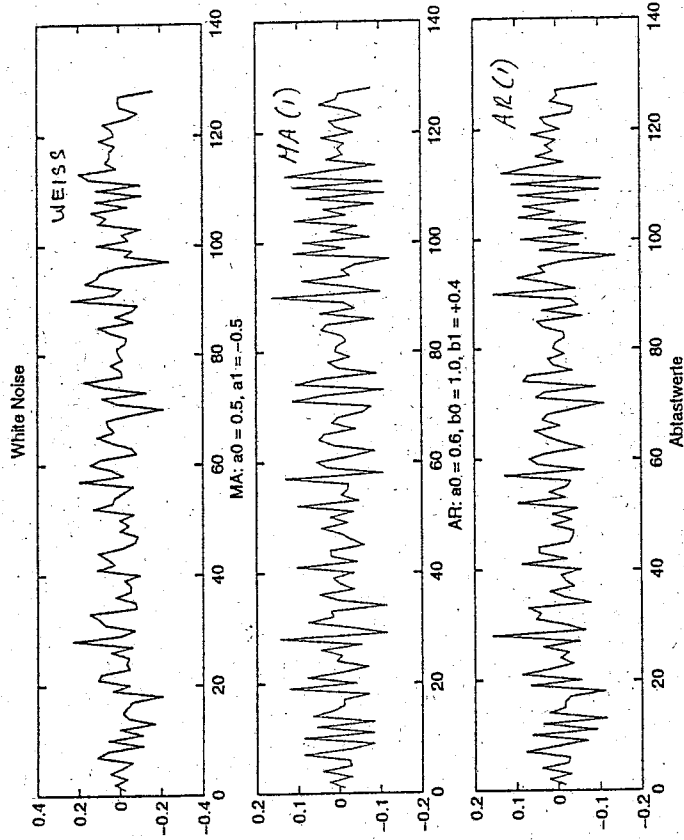
$$\text{PGA (Mauerkrone)} = 0.024 \cdot 86.0 = 2\% \text{ g}$$



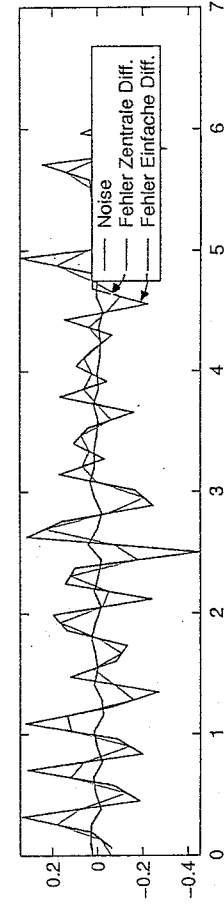
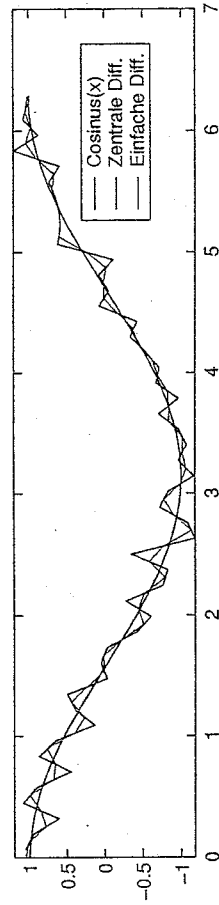
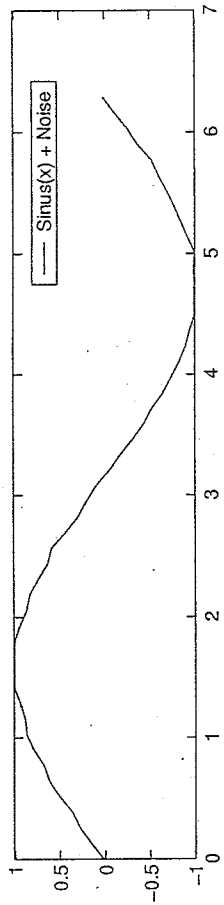
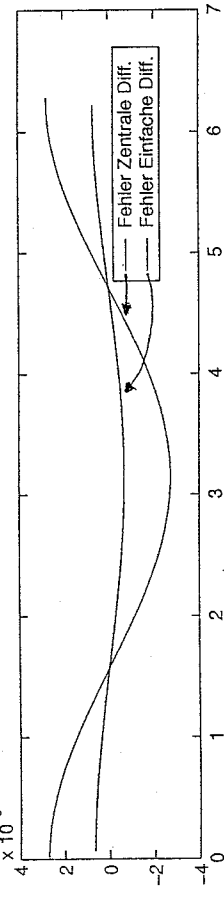
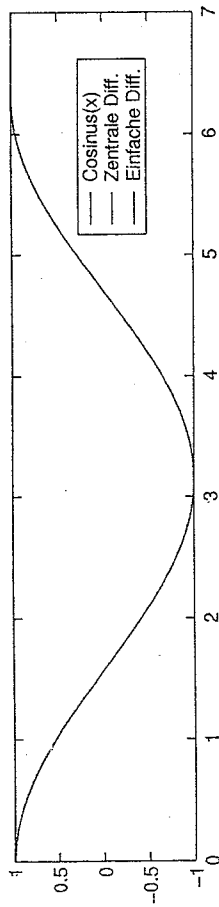
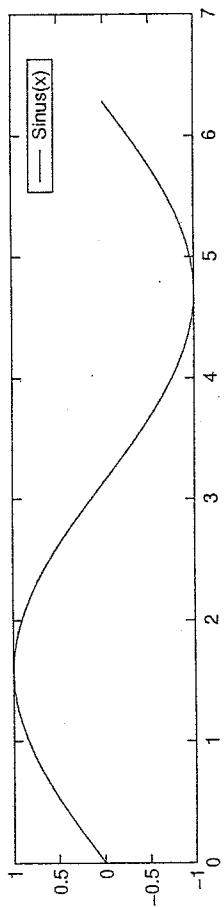
### Aufgabe 3

Obwohl ein MA Prozess der Operation eines gleitenden Mittelwertes entspricht, muss das Resultat nicht notwendigerweise immer eine Glättung zur Folge haben. Als Beispiel ist hier der  $MA(1)$  Prozess der Aufgabe 1 aufgeführt mit dem Koeffizienten  $a_1 = -0.5$  statt  $+0.5$ : Die resultierende Zeitreihe  $x_t$  ist wesentlich unruhiger geworden und im Amplitudenspektrum sind jetzt die tiefen Frequenzen gegenüber der hohen unterdrückt worden. Es handelt sich hier um einen Differenzen-Operator, der wie ein *Hochpass-Filter* wirkt. In der Autokorrelationsfunktion hat dies zur Folge, dass  $\gamma(1) < 0$  ist. Tatsächlich bewirkt das negative Vorzeichen von  $a_1$  eine negative Korrelation zwischen  $x_t$  und  $x_{t-1}$ .

Das entsprechende Beispiel eines  $AR(1)$  Prozesses erhält man durch Änderung des Vorzeichens von  $b_1$ . Im Gegensatz zum Fall des  $MA(1)$  Operators wird aber auch hier wieder die Autokorrelationsfunktion bei  $lag = 2$  nicht 0, sondern schwankt im Prinzip unendlich lang zwischen positiven und negativen Werten hin und her.

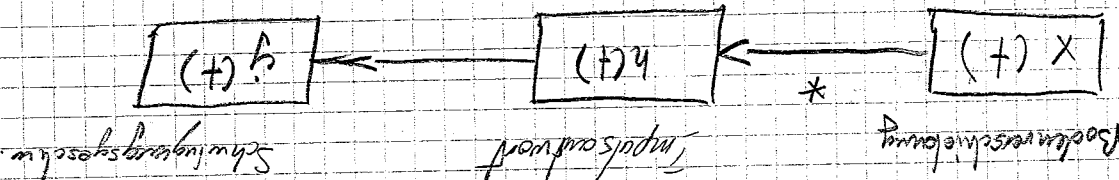


Übung SS 02



Geophysikalische Zeitreihenanalyse

Übung 3



$y(t) = h(t) * x(t)$

$y(t) = [h(t) * x(t)] = \int_{-\infty}^{\infty} h(\tau) x(t-\tau) d\tau$

$\int_{-\infty}^{\infty} y(t) e^{-i\omega t} dt = \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} h(\tau) x(t-\tau) e^{-i\omega t} dt d\tau$   
 $\int_{-\infty}^{\infty} y(t) e^{-i\omega t} dt = \int_{-\infty}^{\infty} h(\tau) e^{-i\omega \tau} d\tau \int_{-\infty}^{\infty} x(t-\tau) e^{-i\omega(t-\tau)} dt$   
 $\int_{-\infty}^{\infty} y(t) e^{-i\omega t} dt = H(\omega) X(\omega)$

$H(\omega) = \frac{\int_{-\infty}^{\infty} y(t) e^{-i\omega t} dt}{\int_{-\infty}^{\infty} x(t) e^{-i\omega t} dt} = \frac{\int_{-\infty}^{\infty} h(\tau) e^{-i\omega \tau} d\tau \int_{-\infty}^{\infty} x(t-\tau) e^{-i\omega(t-\tau)} dt}{\int_{-\infty}^{\infty} x(t) e^{-i\omega t} dt}$

$(1) \int_{-\infty}^{\infty} y(t) e^{-i\omega t} dt = \int_{-\infty}^{\infty} h(\tau) e^{-i\omega \tau} d\tau \int_{-\infty}^{\infty} x(t-\tau) e^{-i\omega(t-\tau)} dt$

$X(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} x(t) e^{-i\omega t} dt$   
 $\Rightarrow \omega^2 X(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} x(t) e^{-i\omega t} dt$   
 weil  $\int_{-\infty}^{\infty} a e^{i\omega t} dt = \frac{d}{d\omega} \int_{-\infty}^{\infty} a e^{i\omega t} dt$   
 wenn  $a_c = 1 \Rightarrow X(\omega) = \frac{1}{\omega^2}$

$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{\omega^2} H(\omega) d\omega = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{\omega^2} \cdot \frac{1}{\omega^2} \cdot H(\omega) d\omega = \int_{-\infty}^{\infty} y(t) dt$

Frequenzwert  
 FT des  
 Bodenverschlebung

$\int_{-\infty}^{\infty} x(t) dt$   
 $\int_{-\infty}^{\infty} y(t) dt$

Fig. 1: Eichsignal

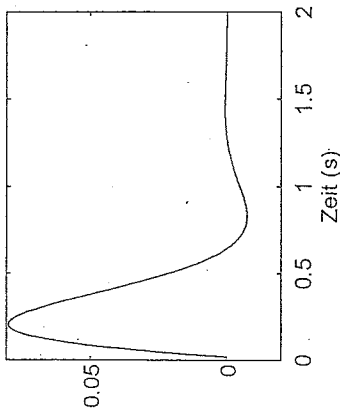


Fig. 3: Impulsantwort

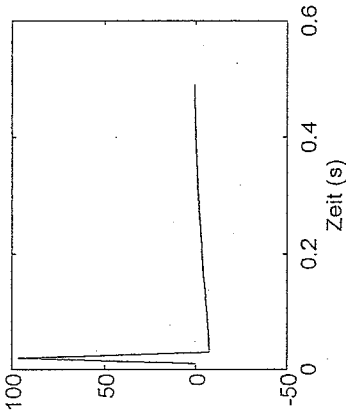


Fig. 2: Amplitudenspektrum

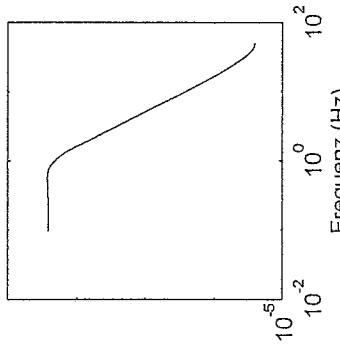
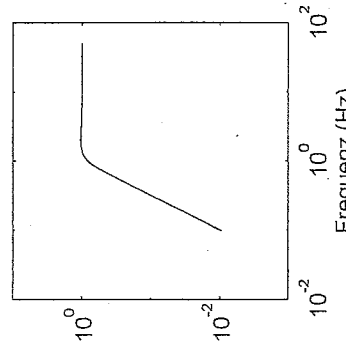


Fig. 4: Frequenzgang



Unter Anwendung der Integrationsregel für die Fourier Transformation gilt

$$X(\omega) = \mathcal{F}\{x(t)\} = \frac{1}{-\omega^2} \mathcal{F}\{\ddot{x}(t)\},$$

sowie die entsprechende Beziehung für  $Y(\omega)$ . Somit gilt auch

$$H(\omega) = \frac{\mathcal{F}\{\dot{y}(t)\}}{\mathcal{F}\{\ddot{x}(t)\}}. \quad (1)$$

Für die Fourier Transformation des Eichsignals  $\dot{y}(t)$  gilt,

$$\mathcal{F}\{\dot{y}(t)\} = \frac{1}{j\omega} \mathcal{F}\{\dot{y}(t)\} \quad (2)$$

und somit

$$\mathcal{F}\{\dot{y}(t)\} = j\omega \mathcal{F}\{\dot{y}(t)\}. \quad (3)$$

Der Betrag von (2) ist als Funktion der Frequenz in Figur 2 dargestellt. Unter Berücksichtigung, dass die Beschleunigungs-Schrittfunction  $\ddot{x}_0(t)$  das Integral von  $\dot{x}(t)$  ist und dass  $\mathcal{F}\{\delta(t)\} = 1$ , gilt für die Fourier Transformation des Eingangssignals

$$\mathcal{F}\{\ddot{x}(t)\} = \mathcal{F}\{\ddot{x}_0(t)\} = \frac{1}{j\omega} \mathcal{F}\{\dot{x}(t)\} = \frac{1}{j\omega}. \quad (4)$$

Durch einsetzen von (3) und (4) in (1) erhält man,

$$H(\omega) = \frac{j\omega \mathcal{F}\{\dot{y}(t)\}}{\frac{1}{j\omega}},$$

woraus das gesuchte Resultat folgt,

$$H(\omega) = -\omega^2 \mathcal{F}\{\dot{y}(t)\} = \mathcal{F}\left\{\frac{d^2}{dt^2} \dot{y}(t)\right\}. \quad (5)$$

Die Multiplikation mit  $-\omega^2$  im Frequenzbereich ist äquivalent zu zweimal ableiten im Zeitbereich. Der Betrag von (5) ist als Funktion der Frequenz in Figur 4 dargestellt. Die rücktransformierte der Übertragungsfunktion (5) ist die Impulsantwort des Seismometers und ist in Figur 3 dargestellt. Somit stellt die Figur 4 auch ein Amplitudenspektrum dar; weil es aber das Amplitudenspektrum (= Betrag der Fourier Transformation) der Impulsantwort des Seismometers ist, bezeichnet man es als Frequenzgang, als Frequenzantwort oder als Übertragungsfunktion.

Das Ergebnis ist anschaulich plausibel, wenn man sich überlegt, dass die erste Ableitung des Eichsignals die Beschleunigung ergibt und die zweite Ableitung die Schrittfunction in den  $\delta$ -Impuls überführt, um somit die Impulsantwort zu ergeben.

Die zwei Signalbeispiele wurden mit 100 Hz abgetastet. Im Fall des synthetischen Eichsignals ist die Übertragungsfunktion oberhalb der Eigenfrequenz des Seismometers (1 Hz) flach bis zur Nyquist-Frequenz (50 Hz). Im Fall des tatsächlich gemessenen Eichsignals ist zusätzlich noch der Effekt des anti-aliasing Filters zu sehen, welches die höheren Frequenzen dämpft.

### Übertragungsfunktion des Seismometers

Als erstes soll gezeigt werden, dass das Eichsignal eines Geschwindigkeitsproportionalen Seismometers zweimal abgeleitet werden muss, um die Impulsantwort, bzw. den Frequenzgang zu erhalten. Der Frequenzgang wird auch Frequenzantwort oder Übertragungsfunktion genannt.

Sei das Eingangssignal  $\ddot{x}(t) = \ddot{x}_0(t)$  die Schrittfunction in der Beschleunigung (= Strom in der Eichspule). Sei  $\dot{y}(t)$  das Eichsignal (Schwinggeschwindigkeit) am Ausgang des Seismometers (Siehe Figur 1). Gesucht ist:

$$H(\omega) = \frac{Y(\omega)}{X(\omega)} = \frac{\mathcal{F}\{\dot{y}(t)\}}{\mathcal{F}\{\ddot{x}(t)\}}.$$

Dies ist die Definition der Übertragungsfunktion.

## Ergänzung zur Übung SS04

In Aufgabe 2 gehen wir von einem 'Seismometer' aus für Beschleunigung am Eingang und Auslenkung (*displacement*) am Ausgang. Seien also  $u(t) = -x(t)$  die Beschleunigung und  $y(t)$  die Massenauslenkung sowie  $\omega_0$  die Eigenfrequenz des ungedämpften Oszillators und  $\xi$  der Dämpfungskoeffizient, dann lautet die entsprechende Differentialgleichung

$$\ddot{y} + 2\xi\omega_0\dot{y} + \omega_0^2 y = u$$

Seien  $U(s)$  und  $Y(s)$  die Laplace Transformierten von  $u(t)$  und  $y(t)$ , dann ist, mit der Annahme dass  $y(0) = \dot{y}(0) = 0$ , die Laplace Transformation der Differentialgleichung

$$(s^2 + 2\xi\omega_0 s + \omega_0^2)Y(s) = U(s)$$

Dann erhalten wir die komplexe Übertragungsfunktion

$$V(s) = \frac{Y(s)}{U(s)} = \frac{1}{s^2 + 2\xi\omega_0 s + \omega_0^2}$$

Diese Gleichung hat genau die gleiche Form wie die Laplace Transformation des im Vorlesungsskript hergeleiteten Eichsignals, mit  $a_c = 1$ . Tatsächlich wirkt dieses System wie ein zweifacher Integrator: Die Beschleunigung  $u(t)$  am Eingang wird zu einer Auslenkung  $y(t)$  am Ausgang. Somit ist die Impulsantwort dieses Systems identisch mit der für das Eichsignal hergeleiteten Gleichung

$$v(t) = \frac{1}{\omega_0} e^{-\xi\omega_0 t} \sin(\omega_0 \sqrt{1 - \xi^2} t)$$



Zeitreihenanalyse in der Geophysik -- Uebung SS04  
 =====

Uebung: Pole und Nullstellen in der s-Ebene.  
 Die Files aufgabel.m und aufgabel2.m sind in  
 /afs/ethz.ch/users/d/deichman/zr/ss04

% Aufgabel: Untersuchen Sie die Lage der Pole und Nullstellen  
 % der Uebertragungsfunktion des Seismometers fuer verschiedene  
 % Werte der Eigenfrequenz und Daempfung.

clear

% Definiere Eigenfrequenz und Daempfung

```
f0 = 0.1;
xi = 0.7;
w0 = 2*pi*f0;
```

% Aufruf von zplane mit Polen und Nullstellen (Spaltenvektoren!)

```
x = -w0*xi;
y = -w0*sqrt(1-xi*xi);
pol = [x-j*y;x+j*y]
zer = [0;0]
subplot(1,2,1)
zplane(zer,pol)
```

% Aufruf von zplane mit Koeffizienten der Uebertragungsfunktion  
 % (Zeilenvektoren!)

```
num = [1 0 0] % Zaehler
den = [1 2*xi*w0 w0*w0] % Nenner
subplot(1,2,2)
zplane(num,den)
```

% Aufgabe 2: Beispiel Seismometer mit Beschleunigung am Eingang  
 % und Auslenkung (displacement) am Ausgang. Untersuchen Sie  
 % die Beziehung der Pole und Nullstellen in der s-Ebene zur  
 % Signalform sowie zum Amplituden- und Phasen-Spektrum.  
 % In welchem Teil der s-Ebene liegen die Pole eines stabilen  
 % Systems? (Vergleichen Sie positive und negative Daempfungswerte.)

clear

% Pole und Nullstellen aus Koeffizienten der Uebertragungsfunktion

```
% -----
xi = 0.2; % Daempfung
f0 = 1; % Eigenfrequenz
w0 = 2*pi*f0;
num = ; % Zaehler (nicht gleich wie Aufgabe 1)
den = ; % Nenner
```

```
figure(1)
subplot(2,2,1)
zplane(roots(num), roots(den))
```

% Berechne und zeichne das Signal

```
% -----
srate = 100;
deltat = 1/srate;
n = 4096;
t = linspace(0, (n-1)*deltat, n);
v = (1 / (sqrt(1-xi^2)*w0)) * (exp(-xi*w0*t));
V = v * (sin(sqrt(1-xi^2)*w0*t));
subplot(2,2,2)
plot(t(1:400), v(1:400))
xlabel('Zeit (s)')
```

% Berechne Frequenzantwort aus Fourier Transformation

```
% -----
nfft = 4096; % zero-padding fuer FFT
nf = ; % Anzahl Frequenzwerte fuer Vektor f
f = ; % Frequenzvektor
V = ; % FFR von v mit zero-padding
```

% Amplitudenspektrum

```
% -----
subplot(2,2,3)
loglog(f, abs(V(1:nf))) % Amplitude bis zur Nyquistfreq.
axis([0.01 100 1e-5 1e-1]) % fuer xi = 0.2
%axis([0.01 100 1e18 1e22]) % fuer xi = -0.2
xlabel('Frequenz (Hz)')
ylabel('Betrag')
```

% Phasenspektrum

```
% -----
subplot(2,2,4)
semilogx(f, (1/pi)*unwrap(angle(V(1:nf)))) % Phase als Vielfache von PI
xlabel('Frequenz (Hz)')
ylabel('Phase (PI)')
```

% Berechne und zeichne Frequenzantwort mit der Funktion freqs

```
% -----
figure(2)
freqs(num,den) % Frequenzachse als Kreisfrequenz
```

% Alternative fuer Frequenzachse in Hz  
 % und Phase in Vielfache von PI:

```
% -----
figure(3)
[H,w] = freqs(num,den); % w = omega
subplot(2,1,1)
loglog(w/(2*pi), abs(H)) % Amplitude als Funktion von Hz
grid
xlabel('Frequenz (Hz)')
ylabel('Betrag')
subplot(2,1,2)
semilogx(w/(2*pi), unwrap(angle(H)/pi)) % Phase als Vielfache von PI
grid
xlabel('Frequenz (Hz)')
ylabel('Phase (PI)')
```

```

% Uebertragungsfunktion des Seismometers fuer Beschleunigung
% am Eingang und Auslenkung (Displacement) am Ausgang:
% Vergleich zwischen analytischer Uebertragungsfunktion
% (Laplace Transformation) und diskreter Uebertragungsfunktion
% (Z-Transformation).

```

```

clear
srate = 100;
n = 200;
nf = 100;
%srate = 1000;
%n = 2000;
%nf = 1000;

% Pole und Nullstellen aus Koeffizienten der analytischen
% Uebertragungsfunktion
f0 = 2;
xi = 0.5;
% xi = -0.5;
w0 = 2*pi*f0;
num = [0 0 1];
den = [1 2*xi*w0 w0^2];
% Zaehler (siehe Aufruf von zplane)
% Nenner

```

```

figure(1)
subplot(1,2,1)
zplane(num,den)
title('S-Ebene')

% Diskrete Uebertragungsfunktion (Z-Transformation),
% berechnet aus Diskretisierung der Differentialgleichung
% mittels einfacher Differenzen
%
T = 1/srate;
a0 = ;
b0 = ;
b1 = ;
b2 = ;
a = [ ];
b = [ ];
subplot(1,2,2)
zplane(roots(a), roots(b))
title('Z-Ebene')

```

```

% Berechne und zeichne die analytische Impulsantwort
%
t = linspace(0, (n-1)*T, n);
v = (1 / (sqrt(1-xi^2)*w0)) * (exp(-xi*w0*t));
v = v .* (sin(sqrt(1-xi^2)*w0*t));
%
figure(2)
plot(t,v)

```

```

xlabel('Zeit (s)')

% Berechne und zeichne die diskrete Impulsantwort mit Funktion filter
%
u = zeros(1,n);
u(1,1) = 1/T;
% Einheitsimpuls
Y = ;
% Diskrete Impulsantwort
hold on
plot(t,Y,'r')
xlabel('Zeit (s)')
hold off
legend('analytisch','diskret')

```

```

% Berechne und zeichne analytische Frequenzantwort mit Funktion freqz
%
[H,w] = freqz(num,den);
figure(3)
subplot(2,1,1)
loglog(w/(2*pi),abs(H))
xlabel('Frequenz (Hz)')
ylabel('Betrag')

subplot(2,1,2)
semilogx(w/(2*pi),unwrap(angle(H))/pi)
xlabel('Frequenz (Hz)')
ylabel('Phase (Pr)')

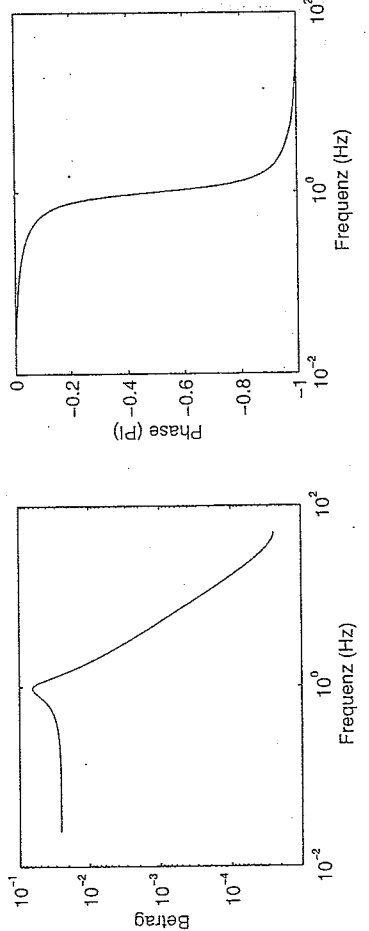
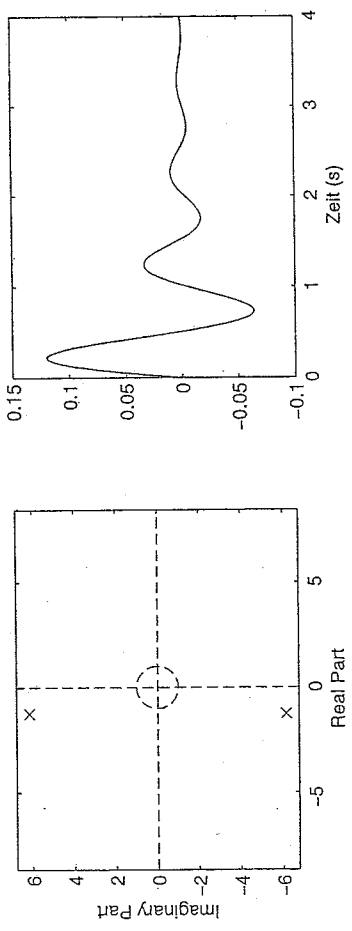
```

```

% Berechne und zeichne diskrete Frequenzantwort mit Funktion freqz
%
[Hd,fd] = freqz(a,b,nf,srate);
figure(3)
subplot(2,1,1)
hold on
loglog(fd,abs(Hd),'r')
hold off
legend('analytisch','diskret')

subplot(2,1,2)
hold on
semilogx(fd,unwrap(angle(Hd))/pi,'r')
hold off
legend('analytisch','diskret')

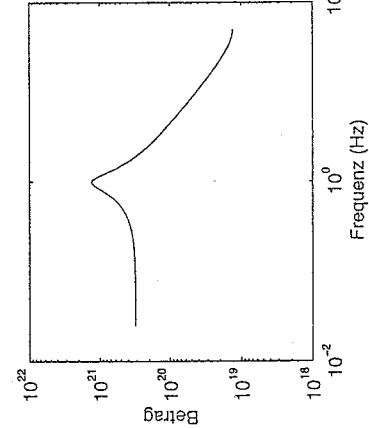
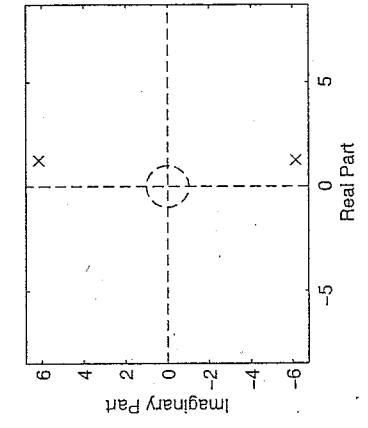
```



Uebung SS04

Pole und Nullstellen, Impulsantwort, Frequenzantwort (Betrag und Phase) eines Seismometers fuer Beschleunigung am Eingang und Auslenkung am Ausgang. Eigenfrequenz  $f_0 = 1$  Hz, Daempfung  $\xi = +0.2$ .

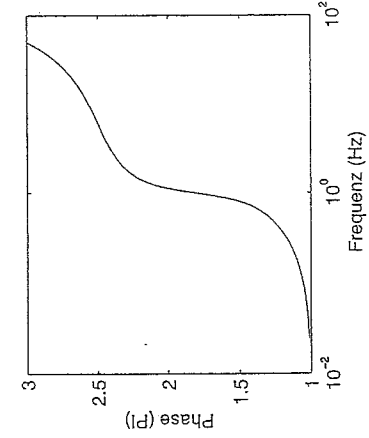
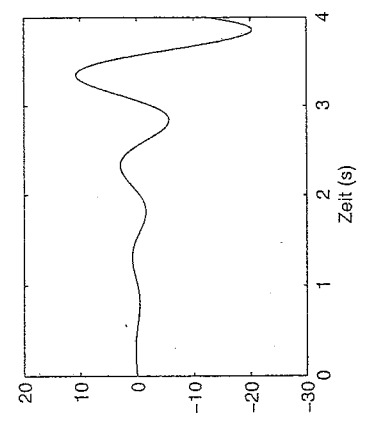
Die Pole befinden sich in der linken Halbebene --> das System ist stabil.



Uebung SS04

Pole und Nullstellen, Impulsantwort, Frequenzantwort (Betrag und Phase) eines Seismometers fuer Beschleunigung am Eingang und Auslenkung am Ausgang. Eigenfrequenz  $f_0 = 1$  Hz, Daempfung  $\xi = -0.2$ .

Die Pole befinden sich in der rechten Halbebene --> das System ist instabil.



Untersuchen Sie die Beziehung zwischen Laplace und Z Transformtion, indem Sie das Verhalten eines stabilen und eines instabilen Systems vergleichen. Verwenden Sie dazu die Übertragungsfunktion des Seismometers fuer Beschleunigung am Eingang und Auslenkung (Displacement) am Ausgang. Verändern Sie dabei den Wert der Dämpfung ( $\xi > 0$  stabil,  $\xi < 0$  instabil. Vergleichen Sie Pole und Nullstellen, Impulsantwort sowie Frequenzantwort.

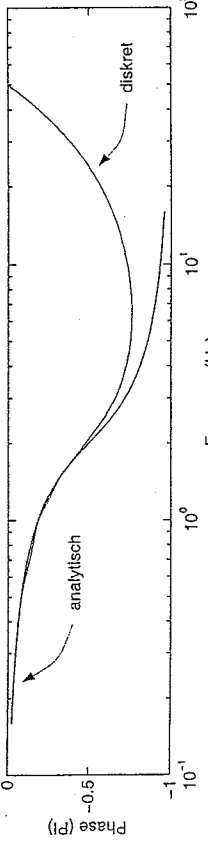
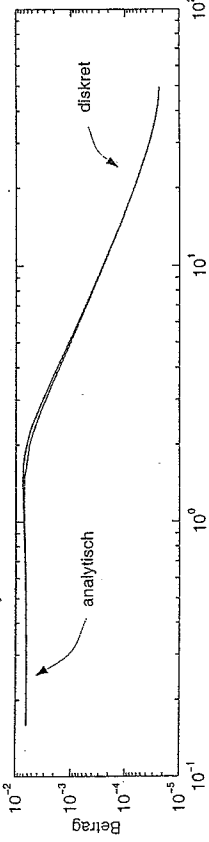
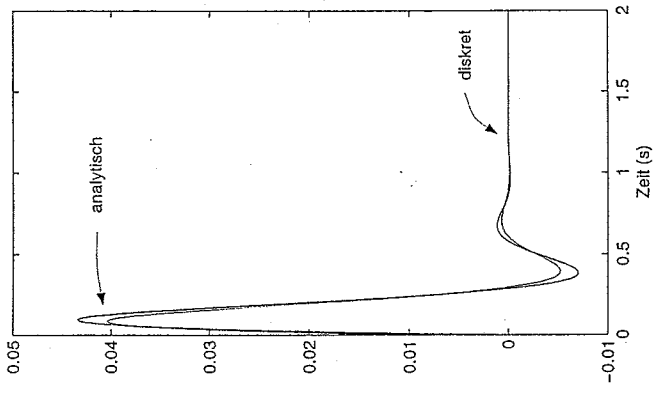
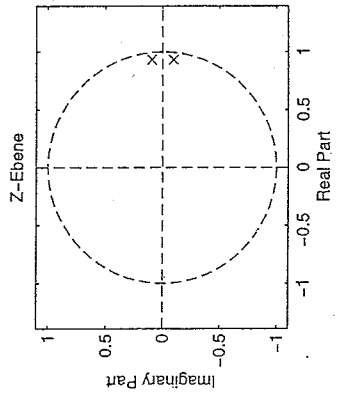
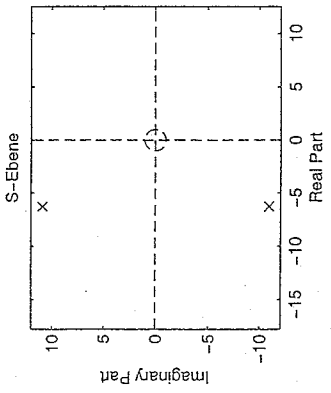
Frage 1: Diskretisieren Sie die Differentialgleichung des Seismometers fuer Beschleunigung am Eingang und Auslenkung (Displacement) am Ausgang mittels einfacher Rückwärtsdifferenzen und berechnen Sie die Koeffizienten  $a_i$  und  $b_i$ .

Frage 2: Wo liegt der Bereich stabiler Systeme in der z-Ebene?

Frage 3: Die diskrete Impulsantwort (aus der Lösung der Differentialgleichung mittels Rückwärtsdifferenzen) stimmt nicht genau mit der analytischen Impulsantwort ueberein. Warum nicht? (Vergleichen Sie das Resultat mit der Abtastrate von 100 Hz mit dem Resultat mit 1000 Hz.)

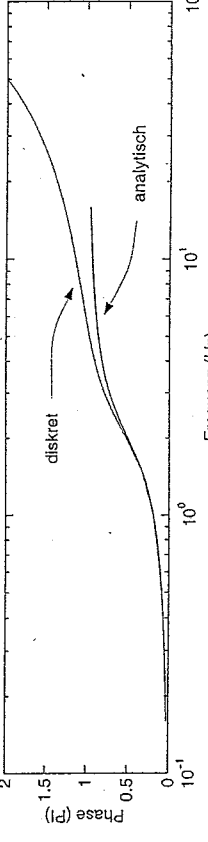
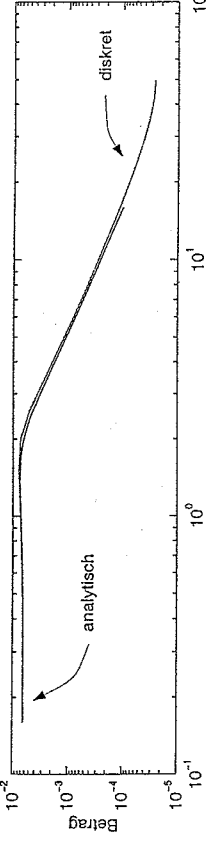
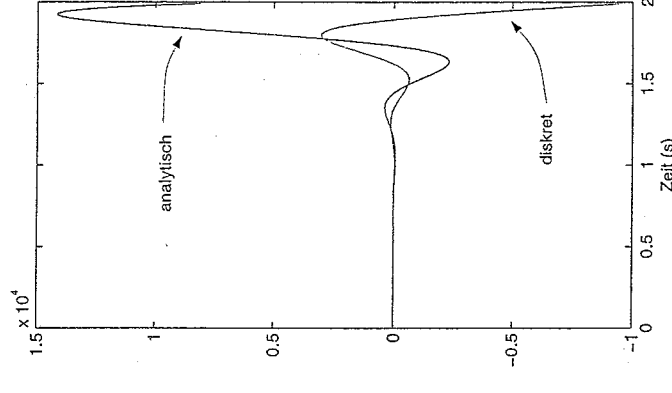
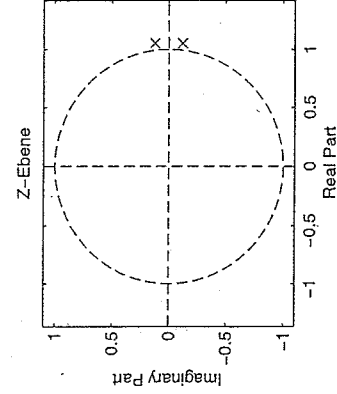
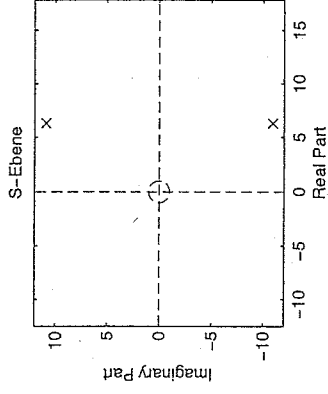
Anleitung:

Das folgende Matlab-Skript ist  
/afs/ethz.ch/users/d/deichman/ss05/aufgabe.m



Übung SS05

Eigenfrequenz  $f_0 = 2$  Hz, Dämpfung  $\xi = +0.5$   
 Die Pole des analogen Systems befinden sich in der linken s-Halbebene --> das System ist stabil.  
 Die Pole des entsprechenden diskreten Systems befinden sich im Inneren des Einheitskreises der z-Ebene.

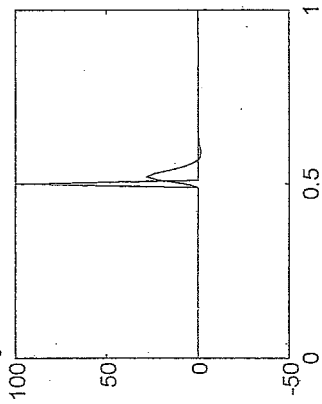


Übung SS05

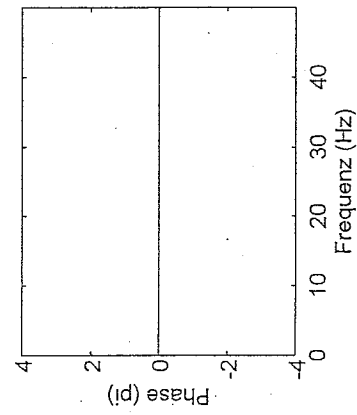
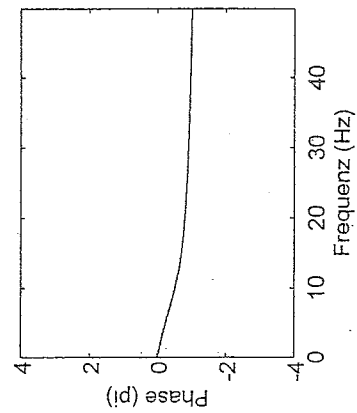
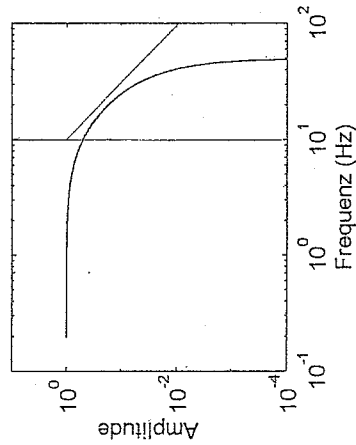
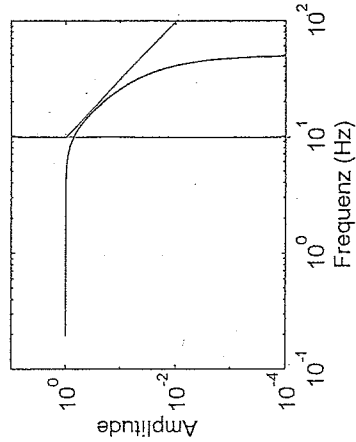
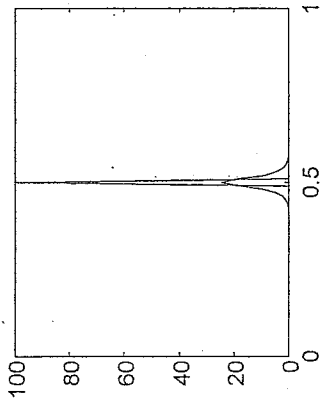
Eigenfrequenz  $f_0 = 2$  Hz, Dämpfung  $\xi = -0.5$   
 Die Pole des analogen Systems befinden sich in der rechten s-Halbebene --> das System ist instabil.  
 Die Pole des entsprechenden diskreten Systems befinden sich ausserhalb des Einheitskreises der z-Ebene.

Übung SS 06 : Butterworth Tiefpassfilter

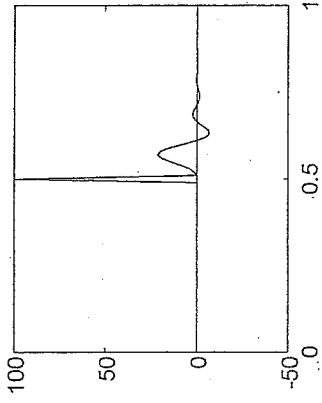
Tiefpass 10 Hz 2. Ord. kausal



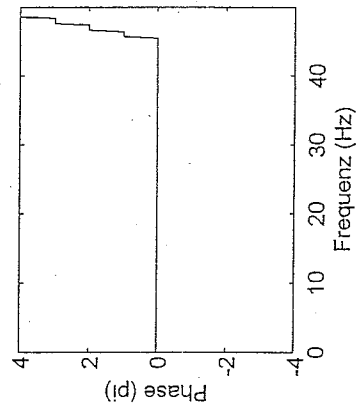
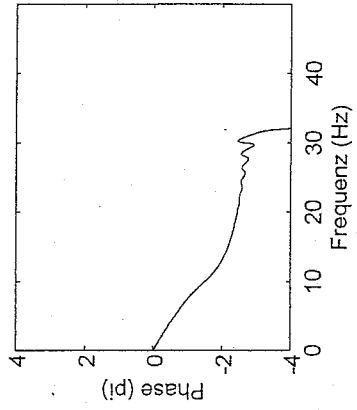
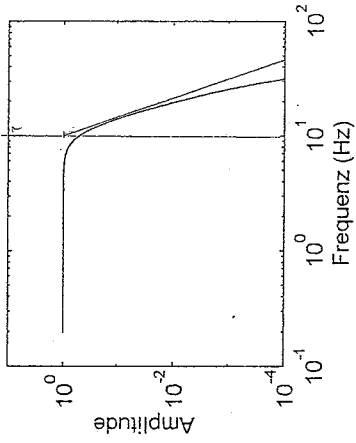
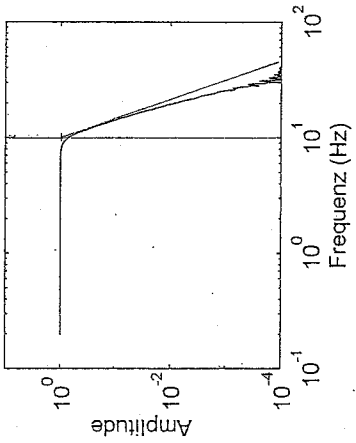
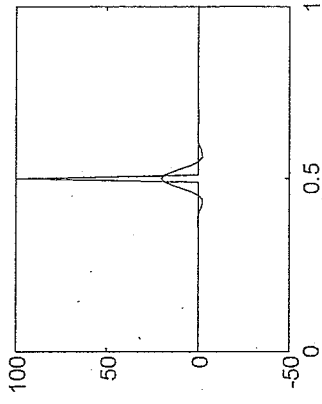
Tiefpass 10 Hz 2. Ord. akausal



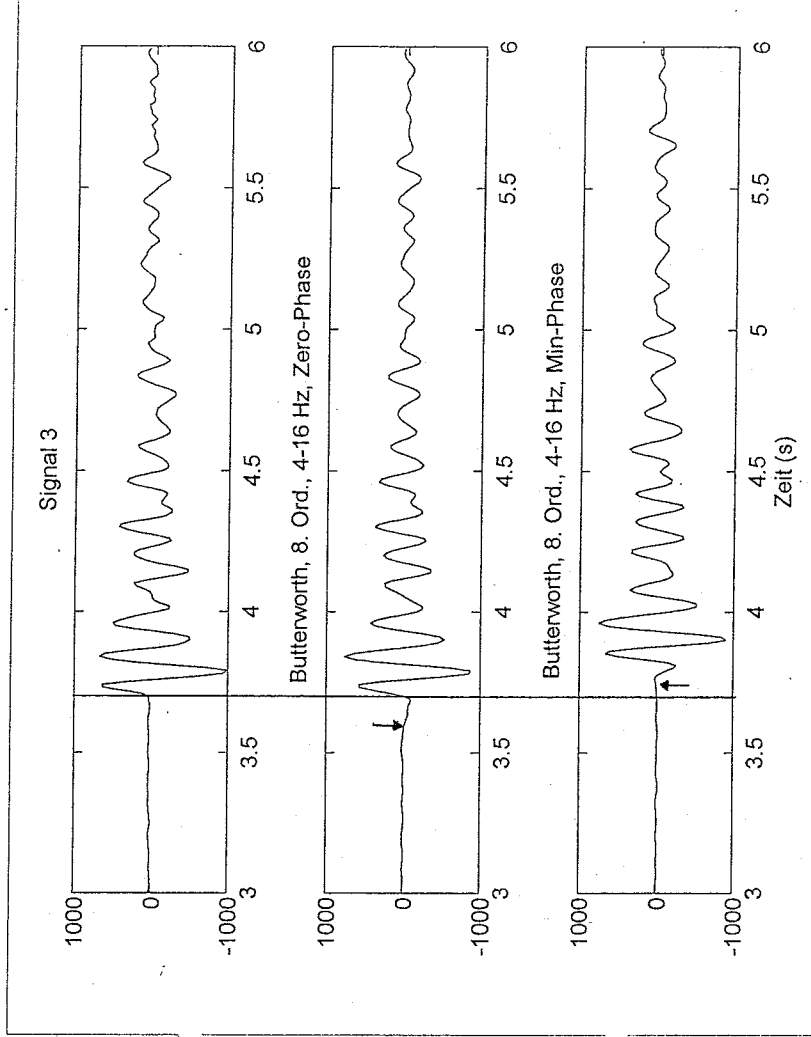
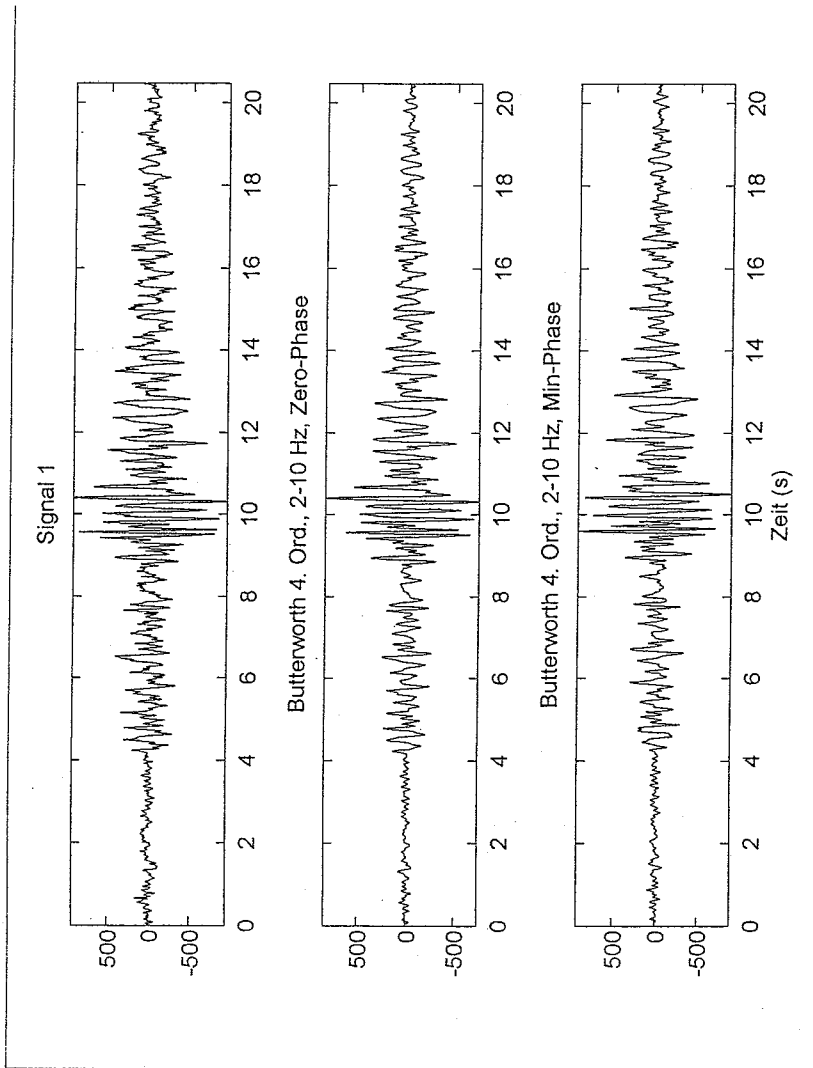
Tiefpass 10 Hz 6. Ord. kausal



Tiefpass 10 Hz 6. Ord. akausal

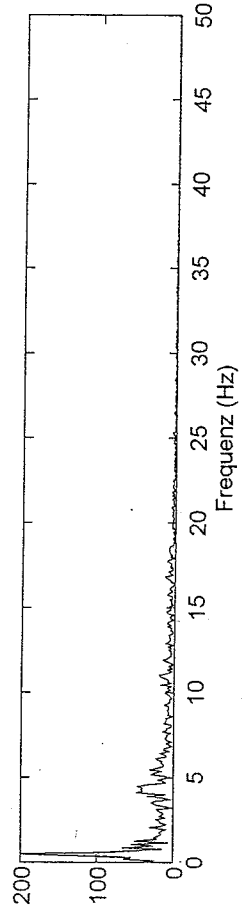
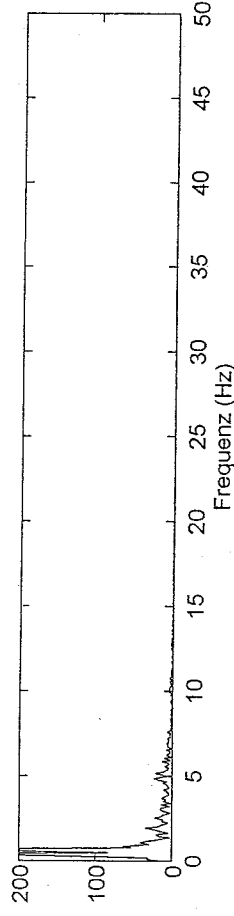
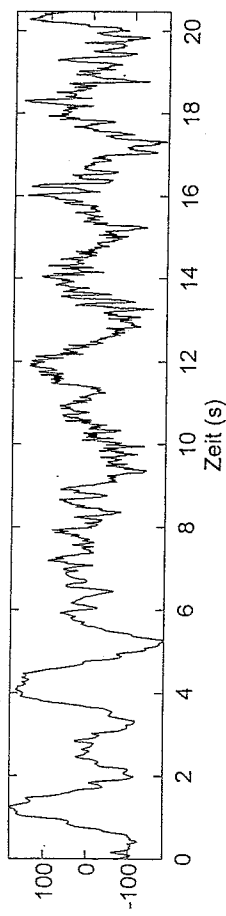


Übung SS07

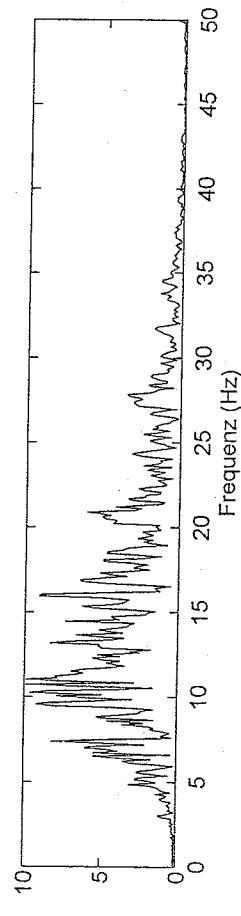
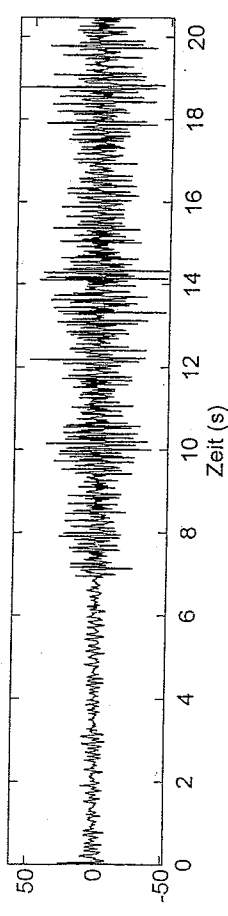


Übung SS 07

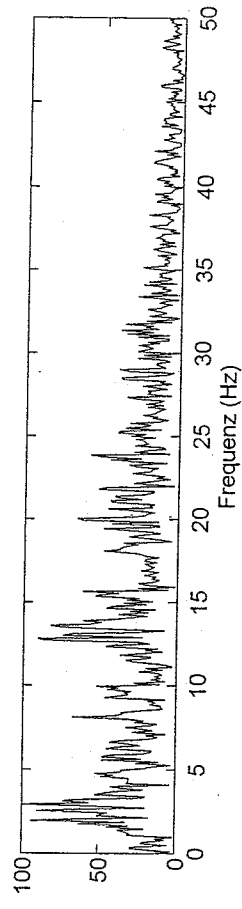
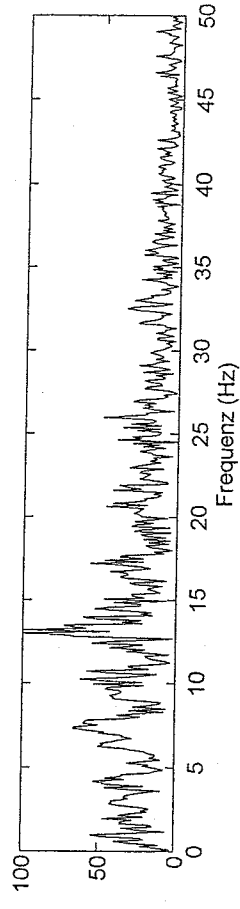
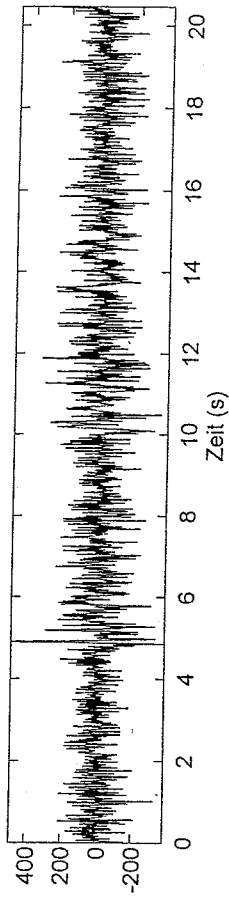
Signal 2



Gefiltert mit HP 4. Ord. 8 Hz



Signal 4



Gefiltert mit BP 4. Ord. 2-8 Hz

