



Polygonzug

Geodätische Messtechnik II

Polygonzug als Methode der Netzverdichtung

Skript Kapitel 4

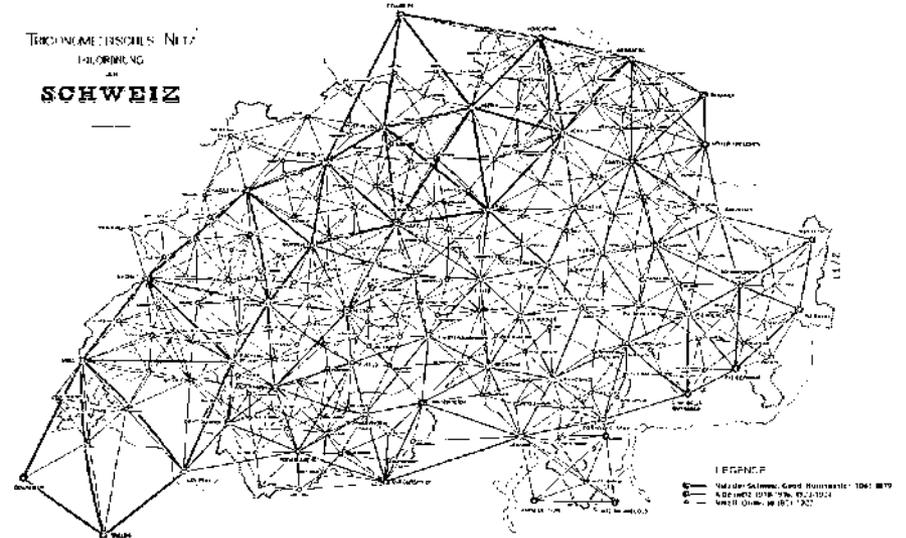
GPS-Landesnetz LV95

Trigonometrisches Netz 1.- 3. Ordnung

GPS-Landesnetz LV95
1989 - 1992



TRIGONOMETRISCHES NETZ
1. ORDNUNG
IN
SCHWEIZ



Lagefixpunkte 1 (LFP 1)

Frühere Bezeichnung:

Triangulationspunkte (TP) I. - III. Ordnung.

- Ausschliesslich Winkelmessungen
- Seitenlängen von 50km bis 5km

Lagefixpunkte 2 (LFP 2)

Frühere Bezeichnung: Triangulationspunkte (TP) IV. Ordnung

- Früher: Winkel und Distanzmessungen
- Heute: Messmethode ist frei → vermehrt GNSS

Basispunkte (LFP 3)

Heute:

Basispunkte (LFP 3)

Die Messmethode ist frei, solange die Genauigkeitsanforderungen eingehalten werden.

Früher:

Polygonpunkte

Die Basispunkte wurden ausschliesslich mit Polygonzügen bestimmt, welche das Netz IV. Ordnung verdichteten.



Amtliche Vermessung

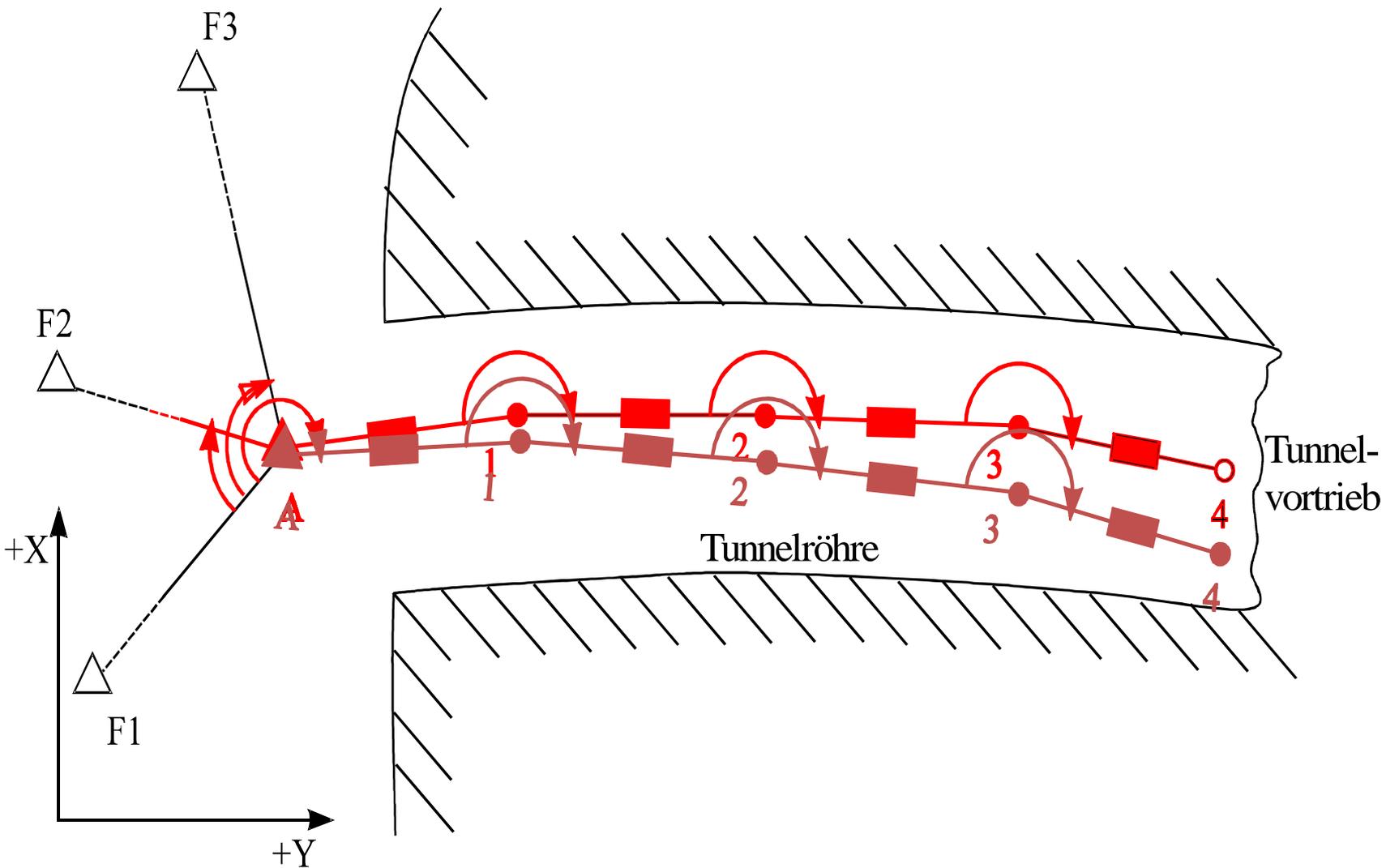


Alp Transit

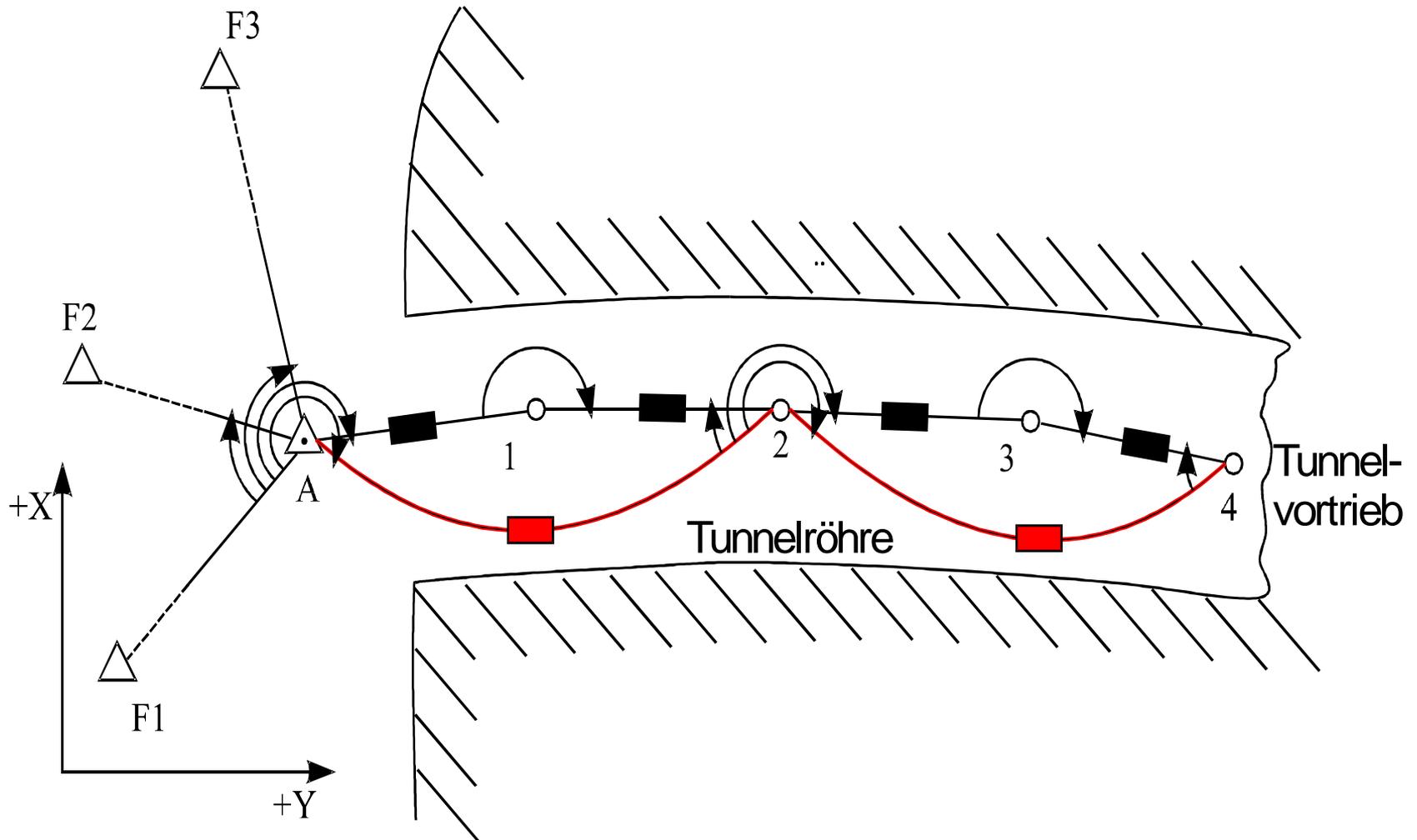
Polygonzugarten

Von frei bis eingezwängt

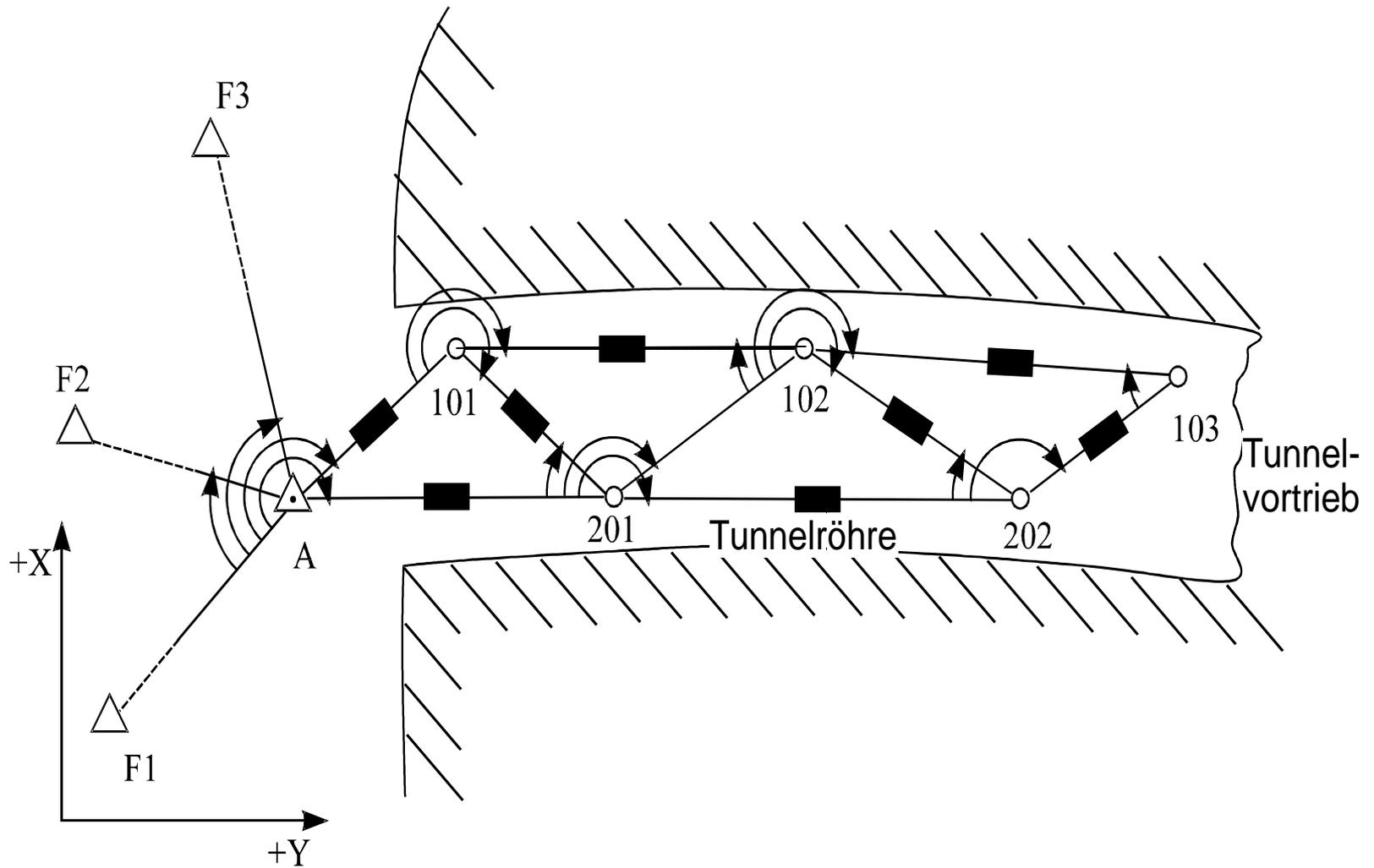
Einseitig angeschlossener Polygonzug



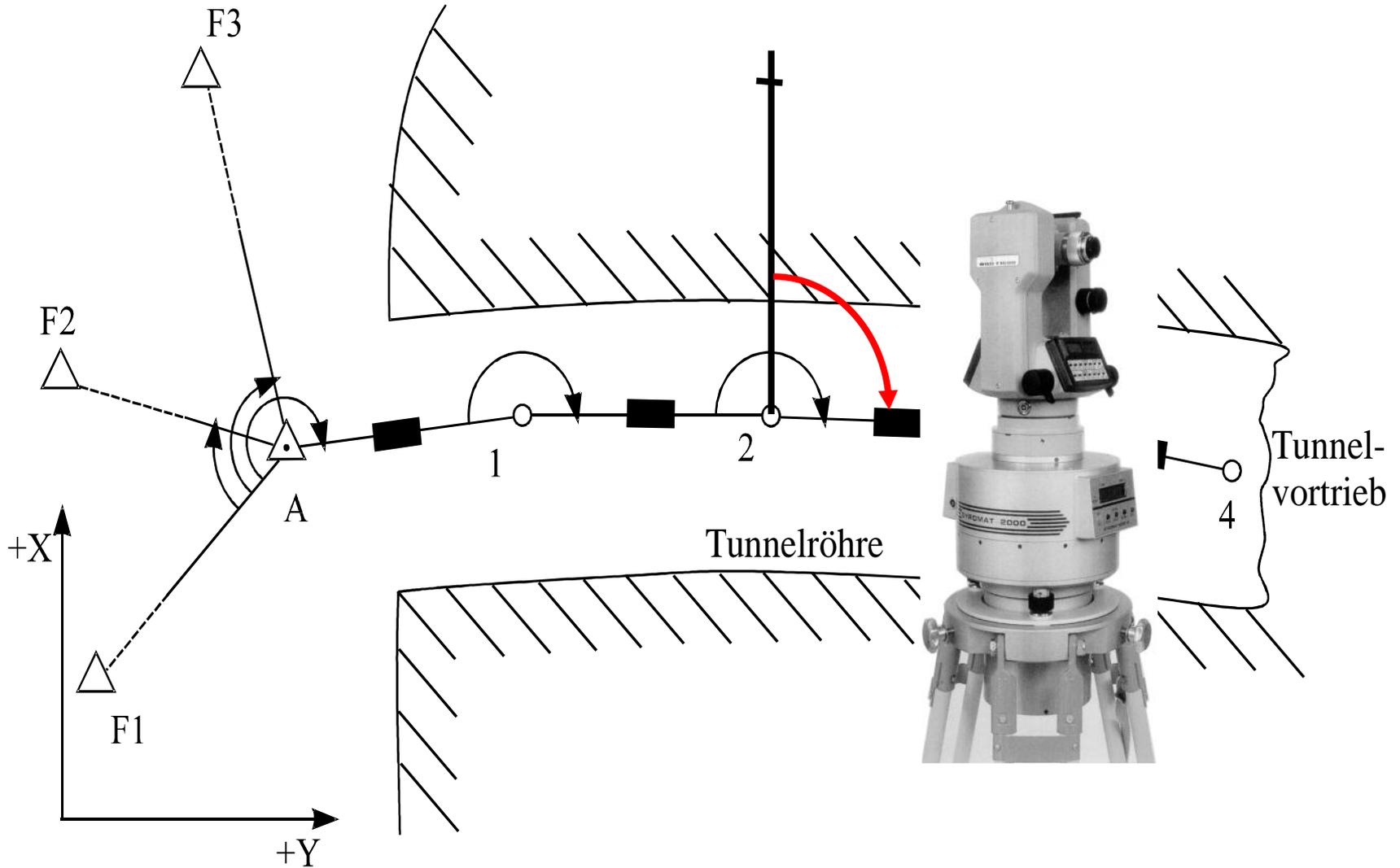
Kontrolle: Doppelt geführter (übergreifender) Polygonzug



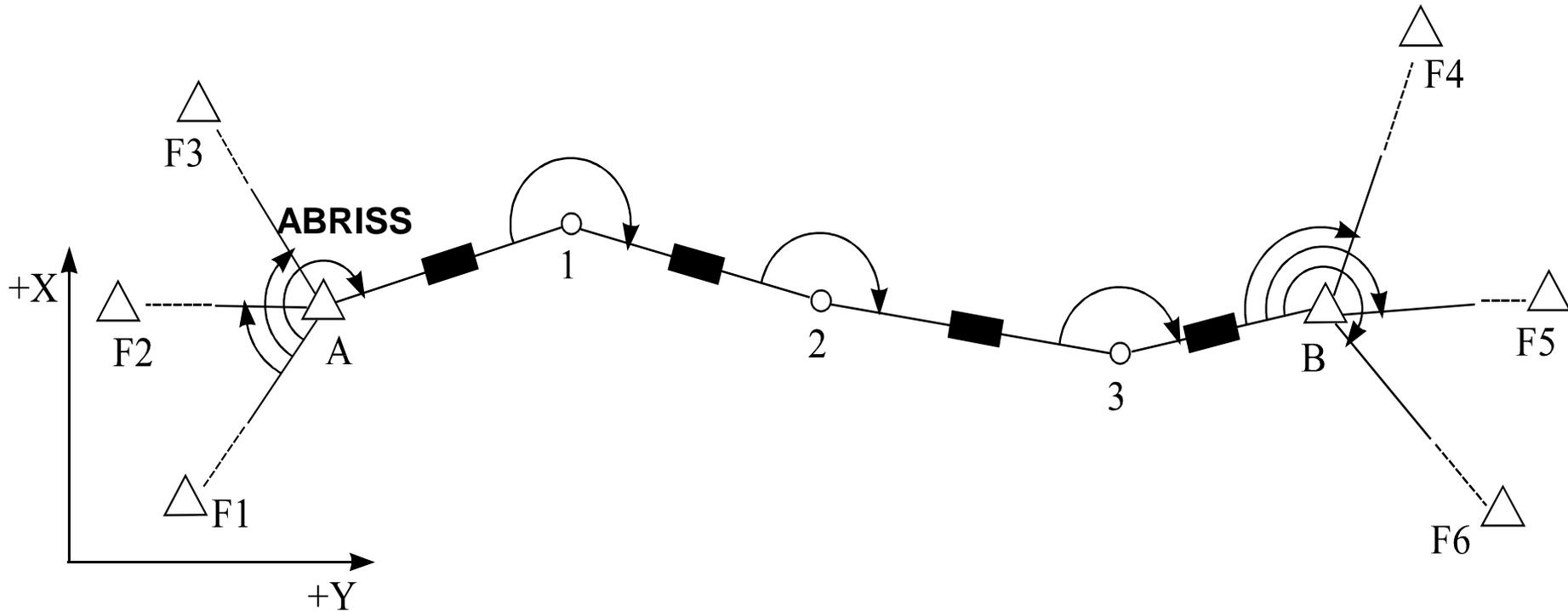
Polygonzugnetz in Tunneln



Kontrolle durch Zwischenorientierung mit Kreisel



Der beidseitig angeschlossene Polygonzug



- Vergleich der berechneten Polygonpunktkoordinaten mit den vorgegebenen Koordinaten des Endpunktes
- Vergleich des Azimuts am Endpunkt

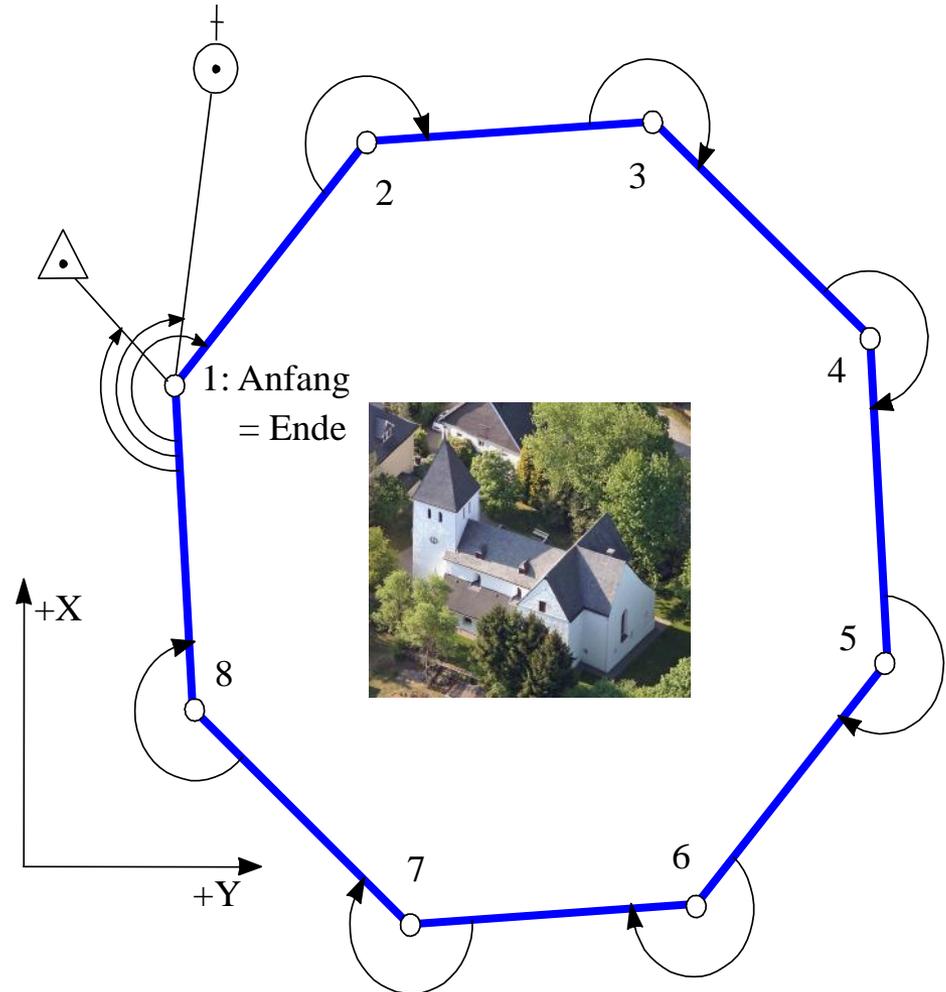
Ringpolygonzug (geschlossener Polygonzug)

Anwendungsbeispiele:

Terrestrischen Photogrammetrie:

- Koordinatenbestimmung der Kamerastandpunkte
- Koordinatenbestimmung der Scannerstandpunkte

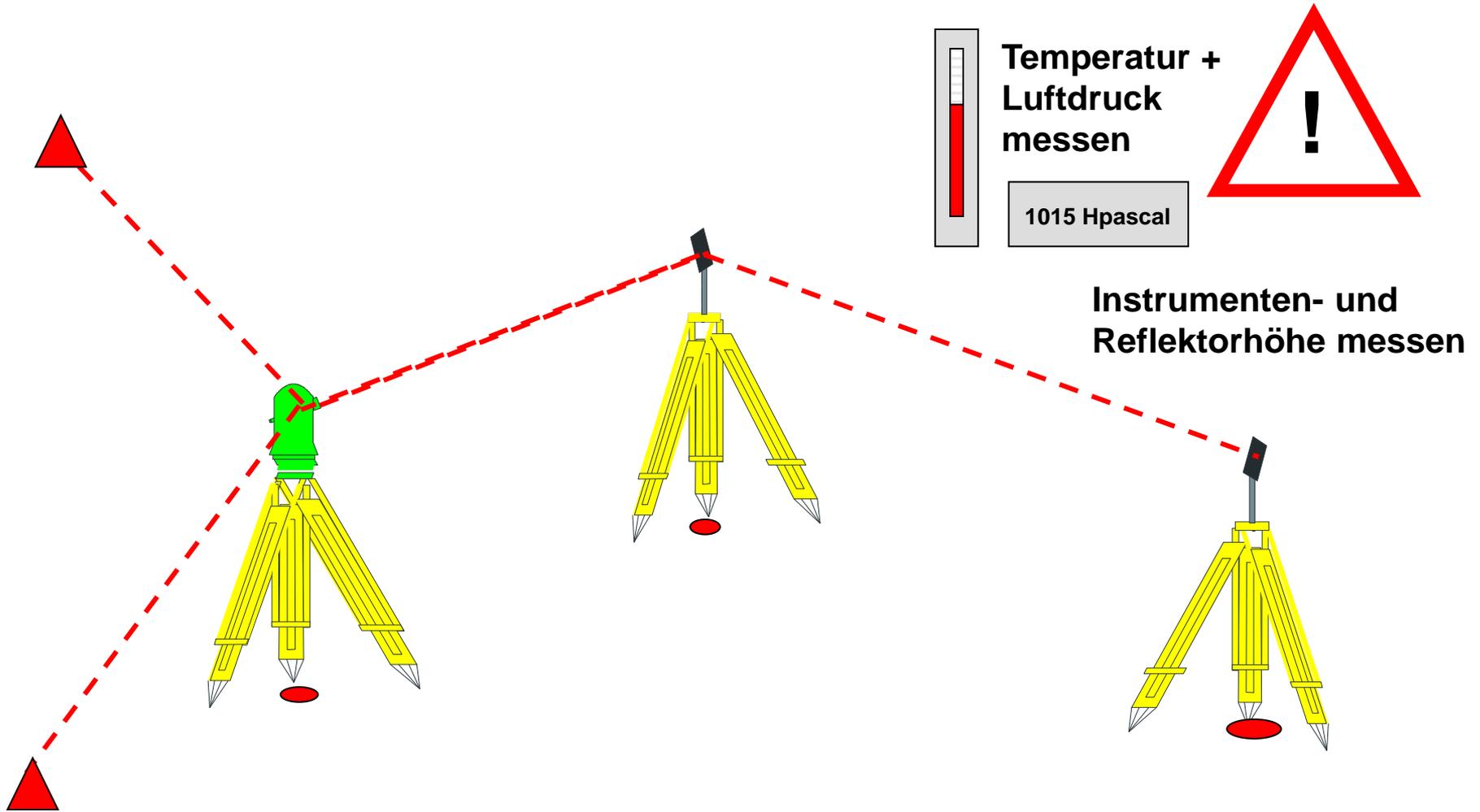
Achtung: diese Zugart sollte eine Ausnahme sein. Drehungen des Gesamtrings sind nur über einen Abriss kontrolliert



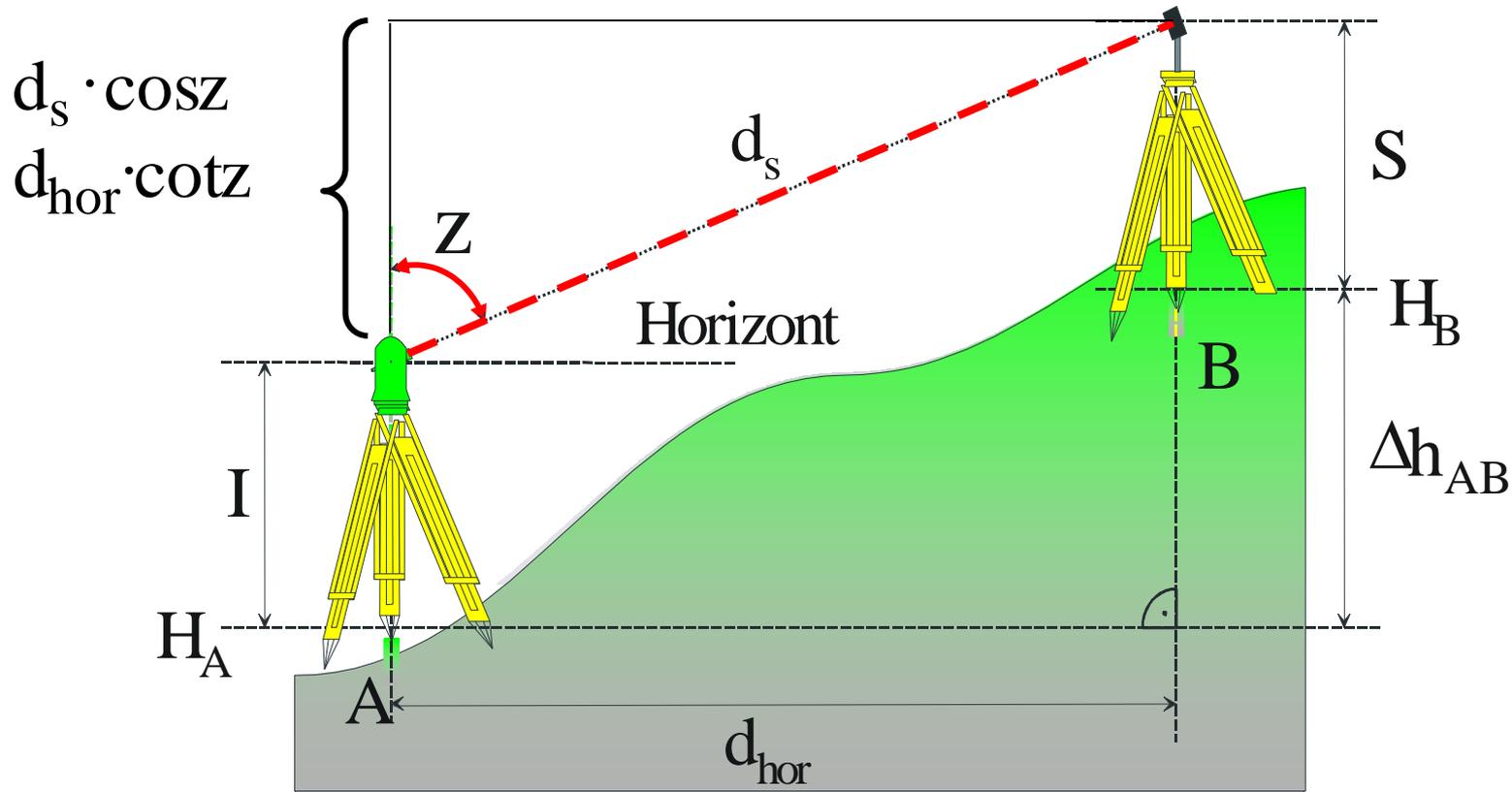
Messvorgang und Berechnung

Wie man den Polygonzug misst

Beobachtungsreihenfolge



3D Polygonzug



$$H_B = H_A + d_m \cdot \cos Z + I - S$$

$$H_B = H_A + d_{hor} \cdot \cot Z + I - S$$

Zweck :

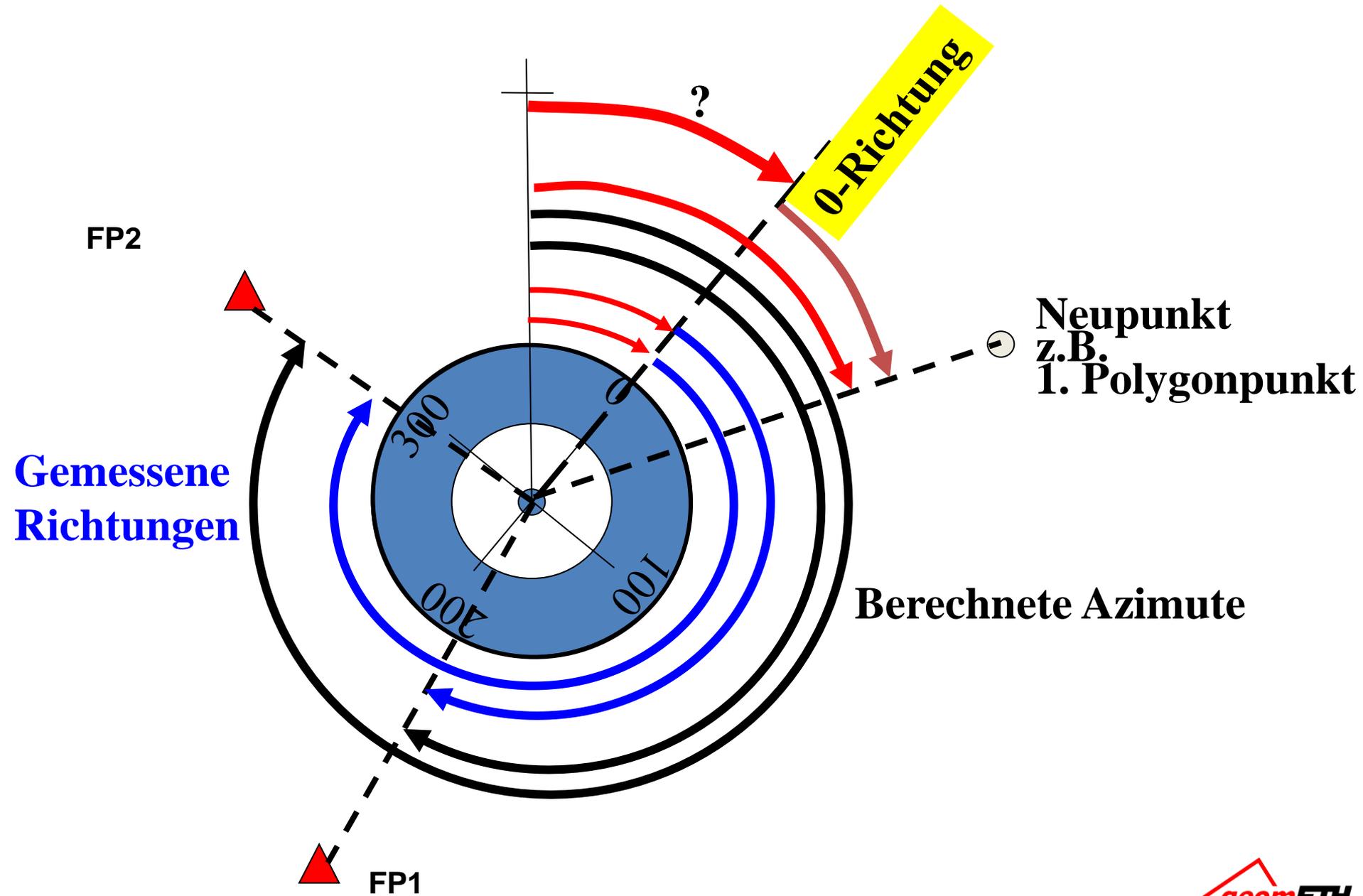
- weitgehende Ausschaltung von Zentrierabweichungen
- Zentrierung bleibt nach Gerätetausch im Bereich von 0.2 mm erhalten

Besonderheit:

- Zentrierter Dreifuss bleibt während der ganzen Messungen mit dem Stativ fest verbunden.
- Austausch Zieltafel /Prisma/ Messgerät
- Nachhorizontieren (in geringem Masse)



Der Abriss: Wie orientiert man den Teilkreis?



Berechnung: Abriss mit drei Fixpunkten

- Gegeben:**
- Koordinaten der Fixpunkte S, F1, F2 und F3
 - Azimute $Az(S,F1)$, $Az(S,F2)$, $Az(S,F3)$ m 2.Hauptaufgabe berechnet
 - (gemittelte) Richtungen zu den Fixpunkten $Ri(F1)$, $Ri(F2)$, $Ri(F3)$

- Gesucht:**
- orientierte Richtungen $OF1$, $OF2$, $OF3$

Punkt	gerechnetes Azimut Az [gon]	beobachtete Richtung [gon]	Az - Ri O_{mittel} [gon]	orientierte Richtung $R + O_{\text{mittel}}$	Verbesserungen $v = O_{\text{mittel}} - O_{Fi}$ [mgon]
F1	$Az(S,F1)$	$Ri(F1)$	O_{F1}	$R_{or}(F1)$	v_{F1}
N1		$Ri(N1)$		$R_{or}(N1)$	
F2	$Az(S,F2)$	$Ri(F2)$	O_{F2}	$R_{or}(F2)$	v_{F2}
N2		$Ri(N2)$		$R_{or}(N2)$	
F3	$Az(S,F3)$	$Ri(F3)$	O_{F3}	$R_{or}(F3)$	v_{F3}
			$O_{\text{mittel}} = \frac{\sum O_i}{n}$		$\sum v_i = 0$

Mögliche Gründe hierfür sind:

- Geländeverschiebungen, die Lage der Punktversicherung ist verändert
- Beschädigung der Punktversicherung
- Verlegung der Punktversicherung
- Punktverwechslung

Eingabetabelle					
Standpunkt			Anschlusspunkte		
Punkt	Koordinaten		Punkt	Koordinaten	
	Y	X		Y	X
A	717448.560	102691.650	F1	717326.613	102850.171
Neupunkte			F2	717227.766	102554.354
Punkt			F3	717573.567	102418.935
N1					

Punkt	Gerechn. Azimut [gon]	Beob. Richtung R [gon]	Az-R Omitt. [gon]	Orientierte Richtung (R + Omitt.)	Verbesserungen	
					v [mgon]	vv
F1	358.2552	0.0000	358.2552	358.2560	-0.8	0.64
F2	264.5839	306.3240	358.2599	264.5800	3.9	15.21
F3	172.6381	214.3850	358.2531	172.6410	-2.9	8.41
N1		152.3750		110.6310		
		Omitt. =	358.2560	Σ	0.2	24.26

Rundungsfehler

Standardabweichung einer Orientierung (Richtung):

$$s_o = \sqrt{\frac{\sum vv}{n-1}} = \sqrt{\frac{24.26}{2}} = 3.5 \text{ [mgon]}$$

Standardabweichung der gemittelten Orientierung:

$$s_{o_{\text{mittel}}} = \frac{s_o}{\sqrt{n}} = \frac{3.5}{\sqrt{3}} = 2.0 \text{ [mgon]}$$

N= Anzahl der Fixpunkte

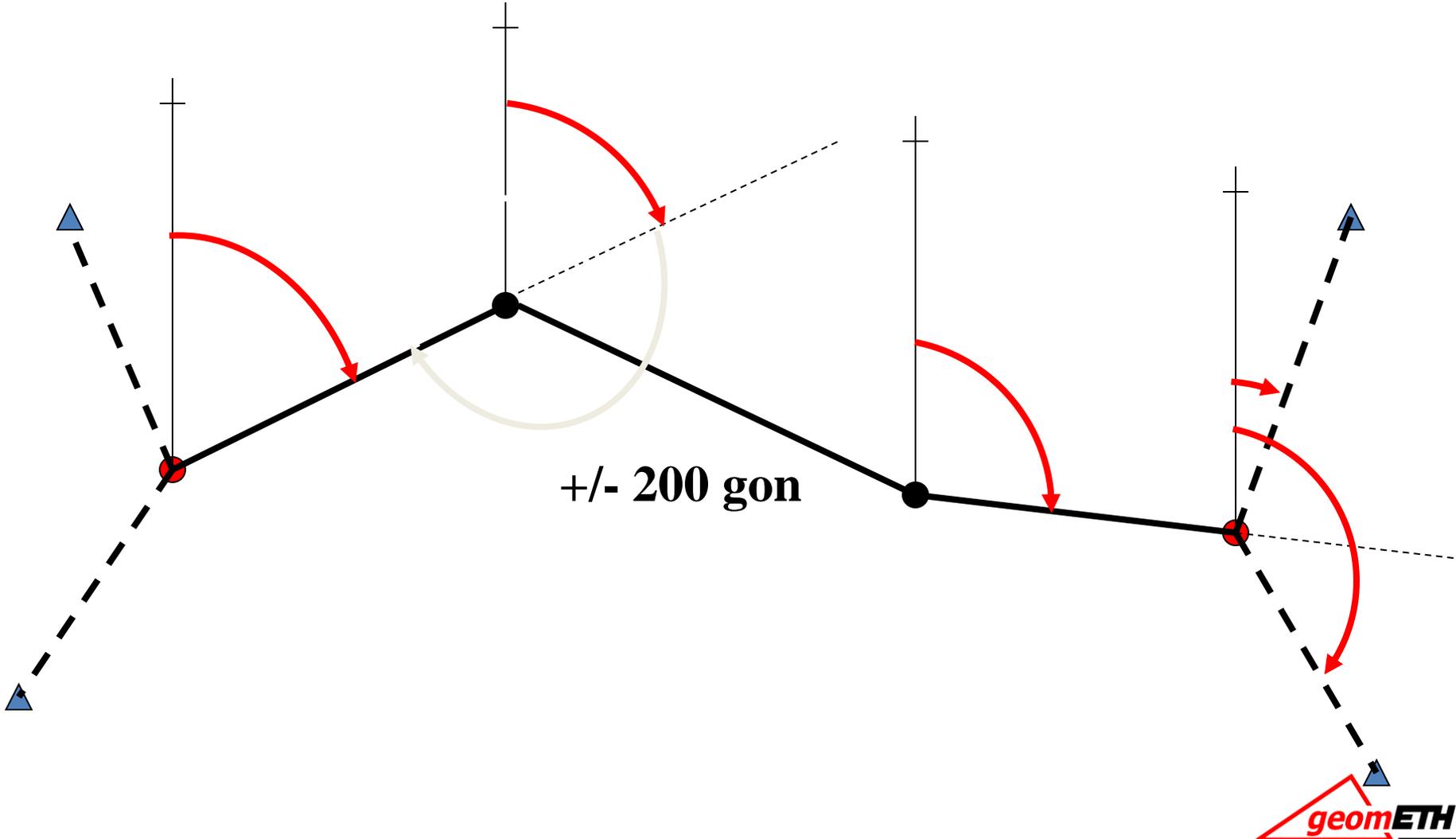
Standardabweichung einer orientierten Richtung:

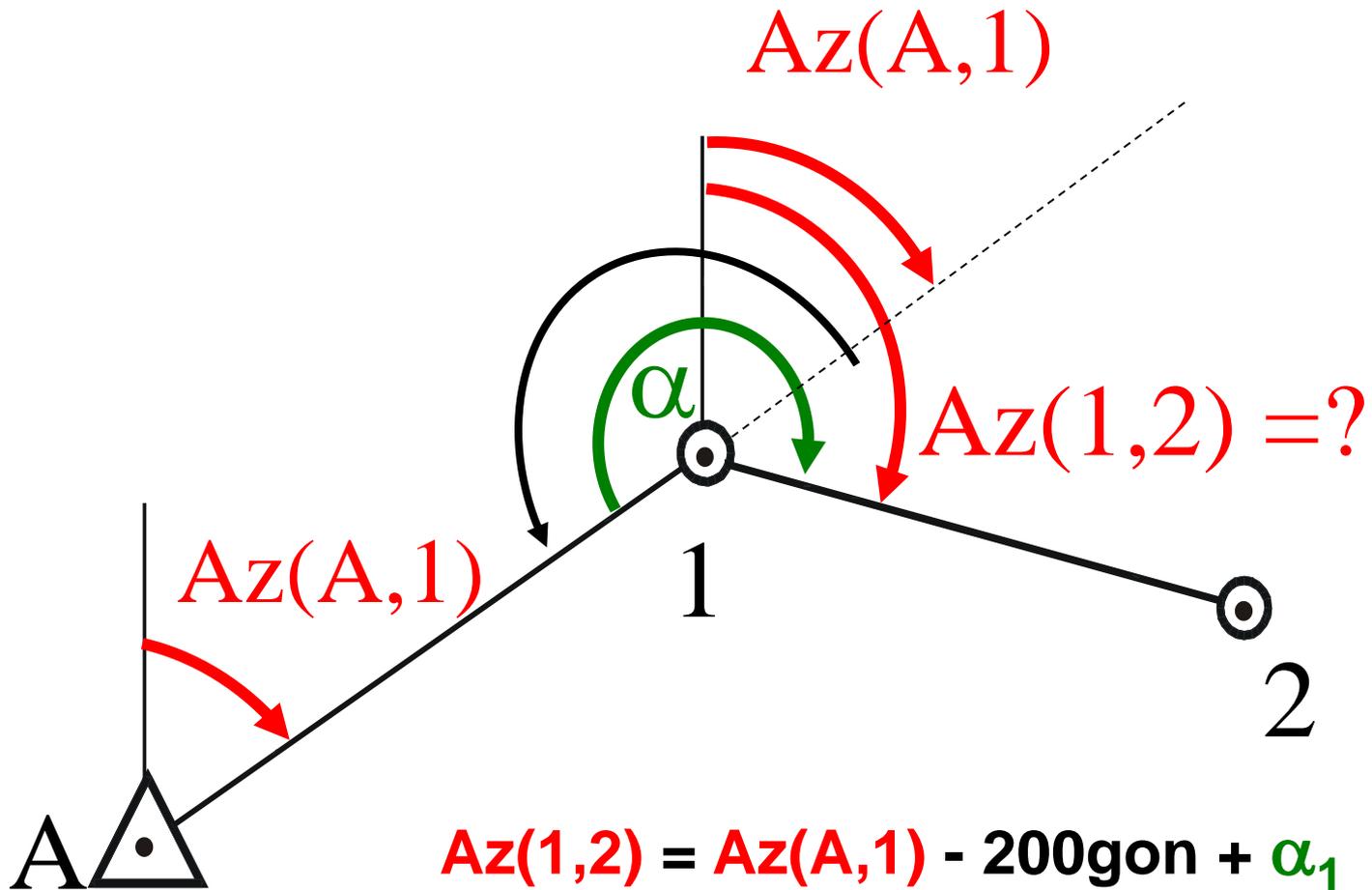
$$s_{R_{OR}}^2 = s_o^2 + s_{o_{mittel}}^2 = s_0^2 + \frac{1}{n} \cdot s_0^2 = s_0^2 \cdot \left(1 + \frac{1}{n}\right) = s_0^2 \cdot \frac{n+1}{n}$$

Achtung:

Hier sind weder Genauigkeit der Fixpunktkoordinaten noch Netzspannungen berücksichtigt

Mess- und Berechnungsablauf





Protokoll Polygonzug

Ort: Carrisa

Instrument: TC500

Objekt: Neubaufahrstrasse

Beobachter: Pfnd

Datum: 11.09.95

Sekretär:

Meer:

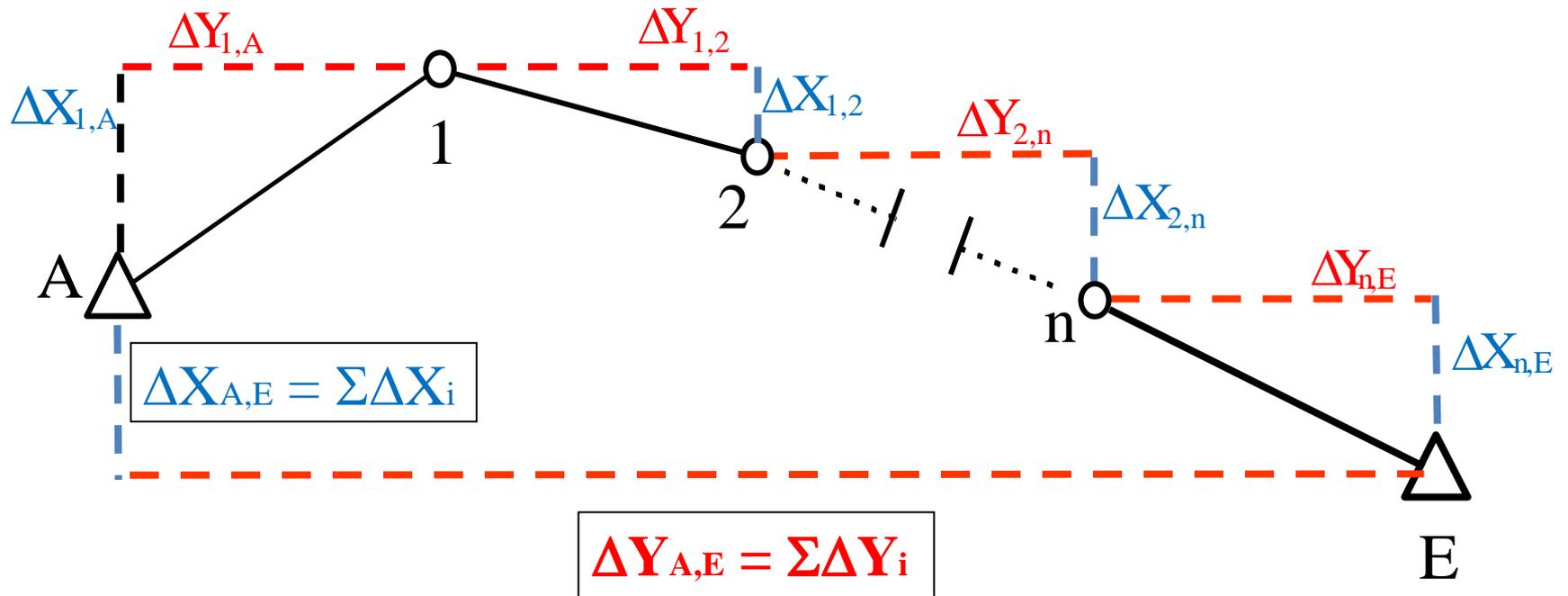
Richtungsmessung

Zahtlmessung

punk	Zepkt	Richtungsmessung				Zahtlmessung			
		Igel	LageI	mittel	Igel	Lage	mittel	Igel	
		[gn]	[gn]	[gn]	[gn]	[gn]	[gn]	[gn]	
A	F1	12567	22.57	2.69	0000	-			
	F2	318890	1	3	4				
	F3	226954		4	5				
	N	164946	3	4	5	35		40.02	
N	A	125684							
	N	313245							
N	N	103547							
	N	298707							

- Distanzkorrektur wegen Atmosphäre
- Distanzkorrektur geometrisch und Projektion
- Reduktion auf Meereshöhe
- Reduktion der Kugeldistanz D_0 in das Projektionssystem

Polygonzug (Summenprobe)



Einfluss Längenmessung

$$\frac{\partial y_i}{\partial D_j} \sigma_D = \sigma_D \cdot \sin Az_j$$

$$\frac{\partial x_i}{\partial D_j} \sigma_D = \sigma_D \cdot \cos Az_j$$

Partiell ableiten nach D

Einfluss Winkel

$$\frac{\partial y_i}{\partial \alpha_j} \frac{\sigma_\alpha}{\rho} = \frac{\sigma_\alpha}{\rho} \cdot \sum_{k=j}^i D_k \cdot \cos Az_k$$

$$\frac{\partial x_i}{\partial \alpha_j} \frac{\sigma_\alpha}{\rho} = \frac{\sigma_\alpha}{\rho} \cdot \sum_{k=j}^i D_k \cdot \sin Az_k$$

Partiell ableiten nach α

$$y_i = y_0 + \sum_{j=1}^i D_j \cdot \sin Az_j$$
$$x_i = x_0 + \sum_{j=1}^i D_j \cdot \cos Az_j$$

Beide Varianzen zusammen

$$\sigma_x^2 = \sum_{j=1}^m \left(\frac{\partial x_m}{\partial D_j} \cdot \sigma_D \right)^2 + \sum_{j=1}^m \left(\frac{\partial x_m}{\partial \alpha_j} \cdot \frac{\sigma_\alpha}{\rho} \right)^2$$

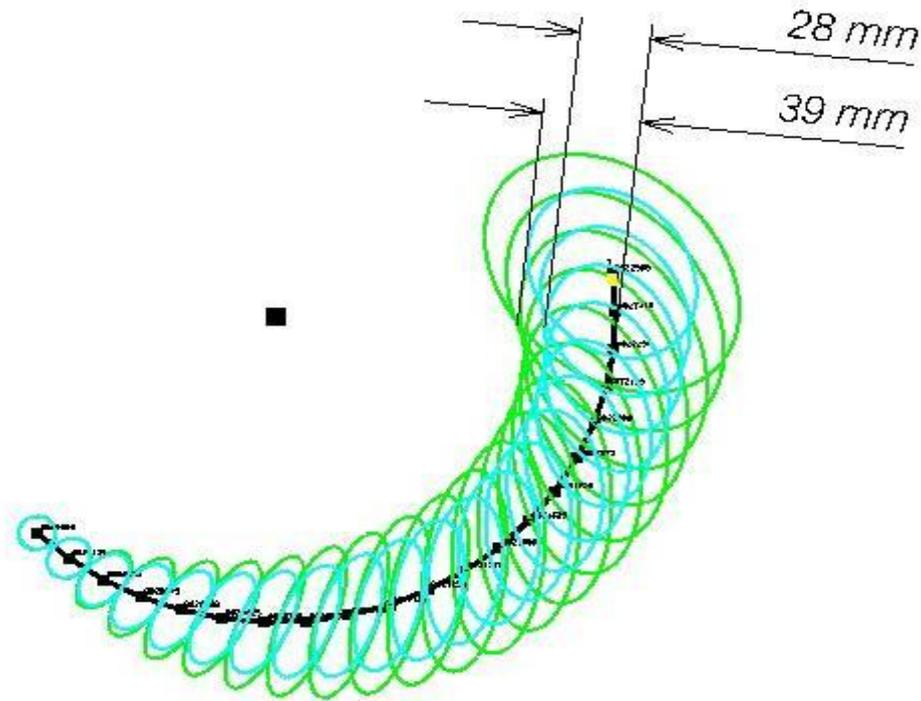
$$\sigma_y^2 = \sum_{j=1}^m \left(\frac{\partial y_m}{\partial D_j} \cdot \sigma_D \right)^2 + \sum_{j=1}^m \left(\frac{\partial y_m}{\partial \alpha_j} \cdot \frac{\sigma_\alpha}{\rho} \right)^2$$

Totales Differenzial bilden

A Priori-Analyse bei **nicht** gestrecktem Polygonzug

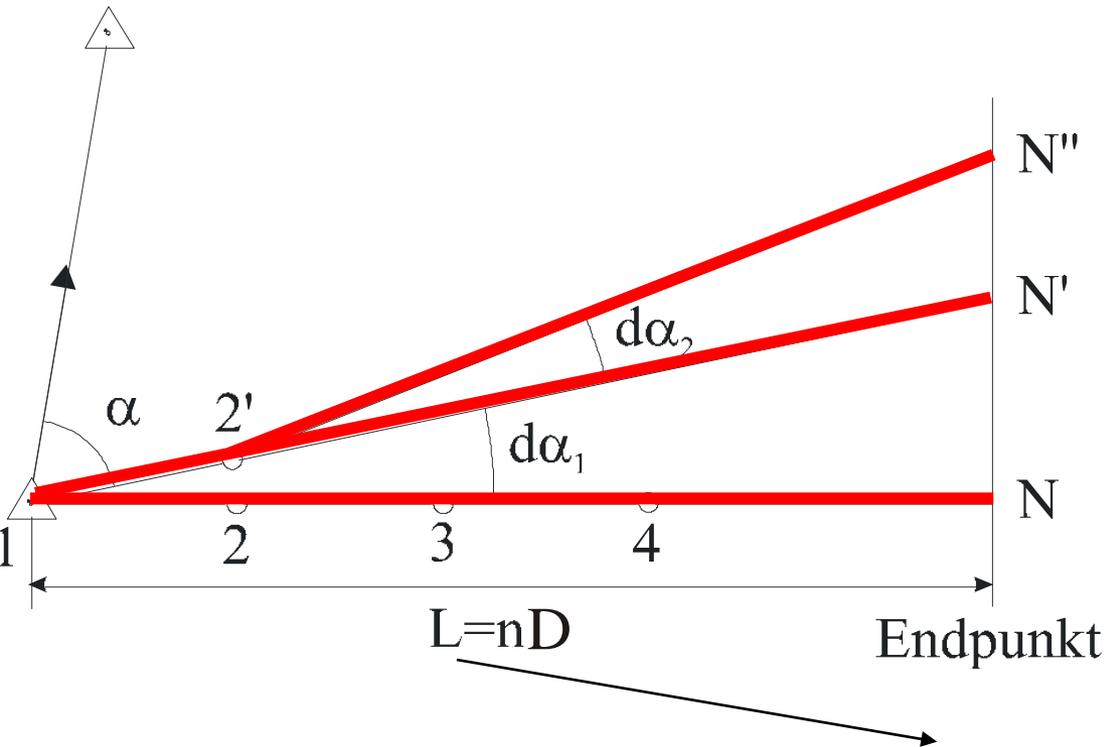
An einem Beispiel mit Ablotung

- Zwei Varianten
 - 1 Azimut / 500 m
 - 1 Azimut / 250 m
- σ_{Lotung} : 1 mm
- σ_{Richtung} : 0.7 mgon
- σ_{Azimut} : 1.5 mgon
- σ_{Distanz} : 1 mm + 1 ppm
- σ_{Setup} : 0.5 mm
- Polygonseitenlänge: 120 m



Näherungsformeln für den gestreckten Polygonzug

Standardabweichungen in Querrichtung s_q



- Winkelabweichungen wirken sich als Abweichungen q quer zur Zugrichtung aus.
- Tritt bei der Messung in 1 eine Winkelabweichung $d\alpha_1$ auf, so kommt 2 nach 2'.
- Misst man von hier aus „fehlerlos“, so erhält der Endpunkt N die Querabweichung NN'.
- Hat man hingegen in 2 die Abweichung $d\alpha_2$, so kommt N' nach N''.

$$NN' = n \cdot D \cdot d\alpha_1$$

$$N'N'' = (n - 1) \cdot D \cdot d\alpha_2$$

$$NN'' = n \cdot D \cdot d\alpha_1 + (n - 1) \cdot D \cdot d\alpha_2$$

$$= D \cdot (n \cdot d\alpha_1 + (n - 1) \cdot d\alpha_2)$$

- Wäre z.B. der erste Winkel um 1 mgon verschwenkt und alle folgenden perfekt gemessen, so hätte man nach 640 m Polygonzug schon dadurch eine Querabweichung von etwa 1 cm.
- Da nun jede folgende Winkelbestimmung auch mit einer gewissen Standardabweichung behaftet ist, wirkt sich dies für einen beliebigen offenen Polygonzug folgendermassen aus:

Querabweichung (gleiche Seitenlänge, gestreckt)

Gesamteinfluss

$$\Sigma: NN^{(n)} = D(n\alpha_1 + (n-1)\alpha_2 + (n-2)\alpha_3 + \dots + 2\alpha_{n-2} + \alpha_{n-1})$$

Unter Verwendung des
Varianzfortpflanzungsgesetzes

$$s_q^2 = D^2 n^2 s_{\alpha_1}^2 + D^2 (n-1)^2 s_{\alpha_2}^2 + D^2 (n-2)^2 s_{\alpha_3}^2 + \dots + 2^2 D^2 s_{\alpha_{n-2}}^2 + D^2 s_{\alpha_{n-1}}^2$$

Wenn die Standardabweichungen der Polygonwinkel alle gleich s_α angenommen werden \rightarrow

$$s_q = s_\alpha^2 \cdot D^2 \cdot (1^2 + 2^2 + \dots + (n-1)^2 + n^2) = s_\alpha^2 \cdot D^2 \cdot \sum_1^n i^2$$

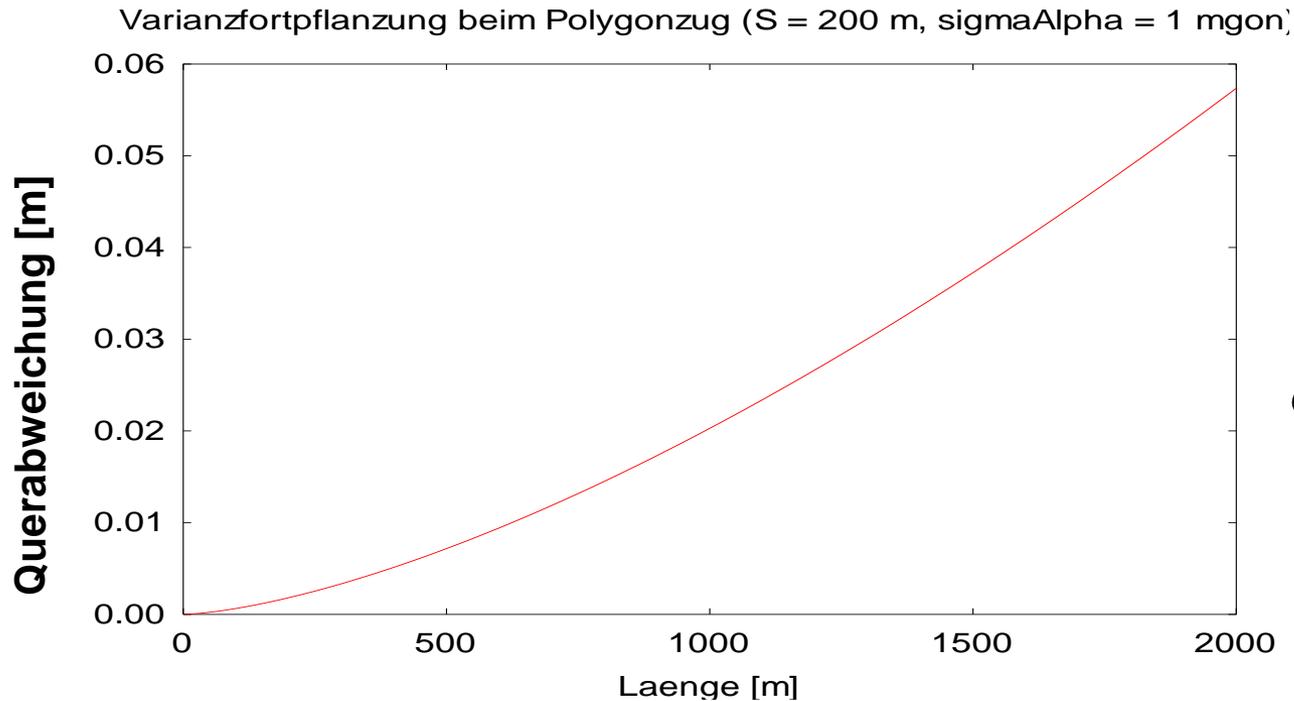
Reihenentwicklung:

$$s_q \cong s_\alpha \cdot D \cdot \sqrt{\frac{n^3}{3}} = s_\alpha \cdot D \cdot \frac{1}{\sqrt{3}} \cdot n^{1.5}$$

$$s_q \cong \frac{s_\alpha}{\sqrt{3}} \sqrt{\frac{L^3}{D}} \cong \frac{s_\alpha L}{\sqrt{3}} \sqrt{\frac{L}{D}} \cong s_\alpha L \sqrt{\frac{n}{3}}$$

$$\text{mit: } n = \frac{L}{D}$$

Wie pflanzen sich zufällige Richtungsabweichungen beim gestreckten Polygonzug fort?



$$\sigma_q = \frac{\sigma_\alpha}{\sqrt{3}} \sqrt{\frac{L^3}{S}}$$

Standardabweichung der Querabweichung Mitte und Ende

einseitiger, freier
Polygonzug, StdAbw. in
Querrichtung, Zugmitte

$$s_{qM} = L \cdot \frac{s_\alpha}{\rho} \cdot \sqrt{\frac{n}{24}}$$

eingezwängter Polygonzug,
zweiseitiger Koordinaten- und
Richtungsanschluss, Zugmitte

$$s_{qM} = L \cdot \frac{s_\alpha}{\rho} \cdot \sqrt{\frac{n}{192}}$$

einseitiger, freier
Polygonzug, StdAbw. in
Querrichtung, Zugende

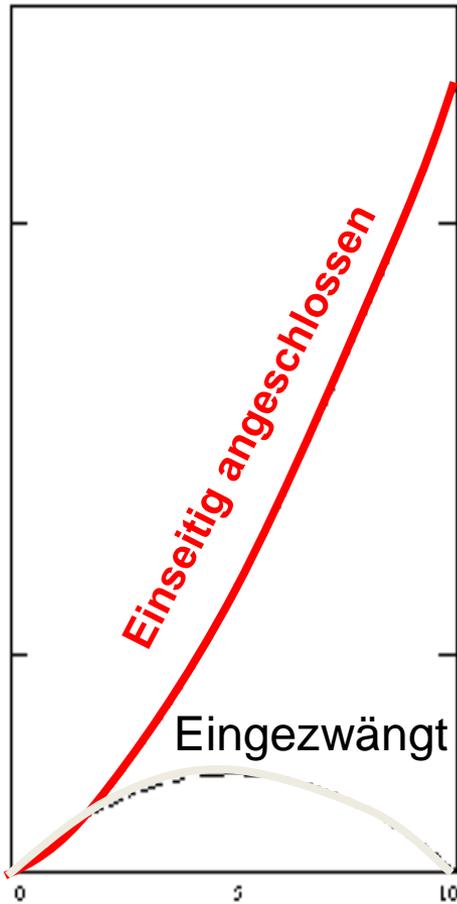
$$s_{qE} = L \cdot \frac{s_\alpha}{\rho} \cdot \sqrt{\frac{n}{3}}$$

eingezwängter Polygonzug,
zweiseitiger Koordinaten- und
Richtungsanschluss, Zugende

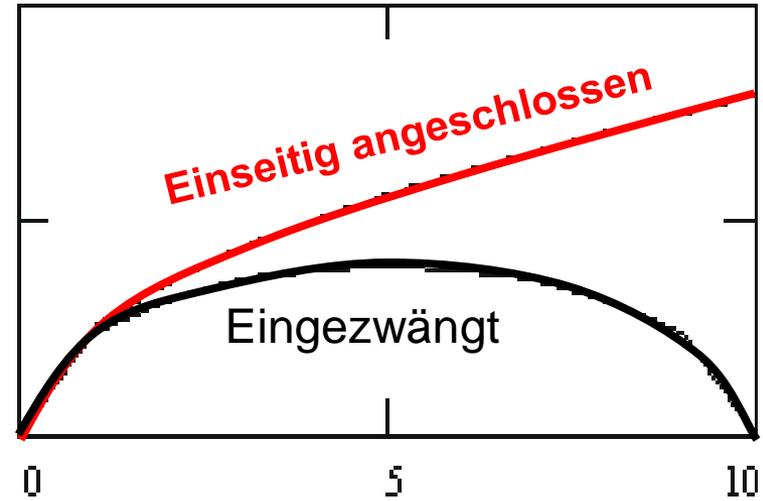
$$s_{qE} = 0$$

es gilt: Anzahl Seiten n , gleiche Seitenlänge D , Gesamtlänge $L = n \cdot D$,
alle Winkel gleich genau gemessen mit Standardabweichung s_α

Querabweichung



Längsabweichung



Varianzfortpflanzung beim gestreckten Polygonzug:

$$\text{Längsabweichung: } \sigma_l = \sigma_D \sqrt{\frac{L}{D}}$$

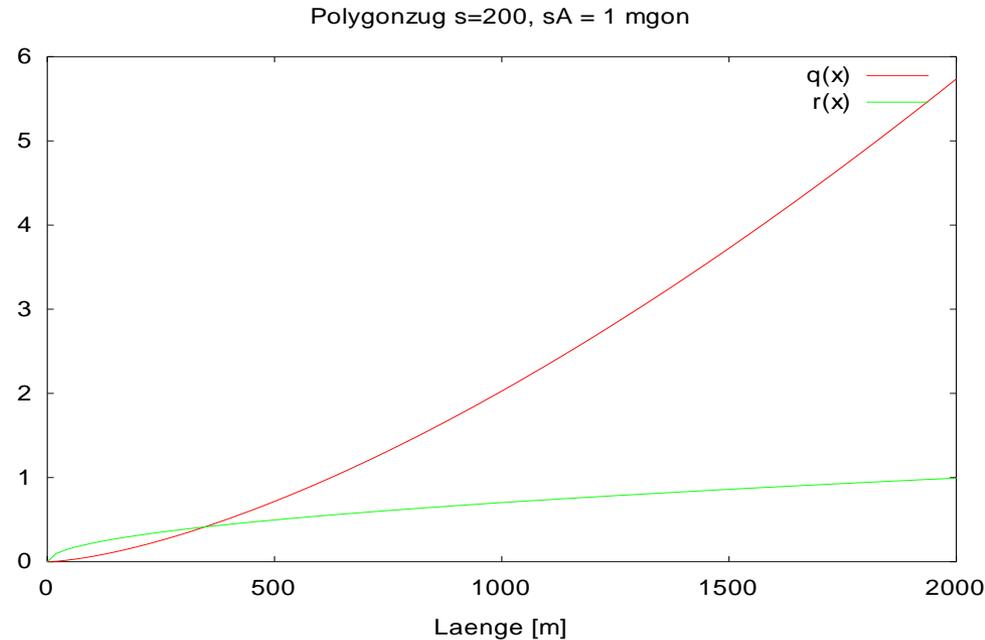
$$\text{Querabweichung: } \sigma_q = \frac{\sigma_\alpha}{\sqrt{3}} \sqrt{\frac{L^3}{D}}$$

Varianzfortpflanzung beim gestreckten Kreiselzug:

$$\text{Längsabweichung: } \sigma_l = \sigma_D \sqrt{\frac{L}{D}}$$

$$\text{Querabweichung: } \sigma_q = \sigma_\alpha \sqrt{L \cdot D}$$

D: Seitenlänge
L: Gesamtlänge



Methoden der Polygonzugeinpassung

Einpassung durch Verteilung der Winkel und Streckendifferenzen (klassisch)

Drehstreckung durch Helmertransformations (modern)

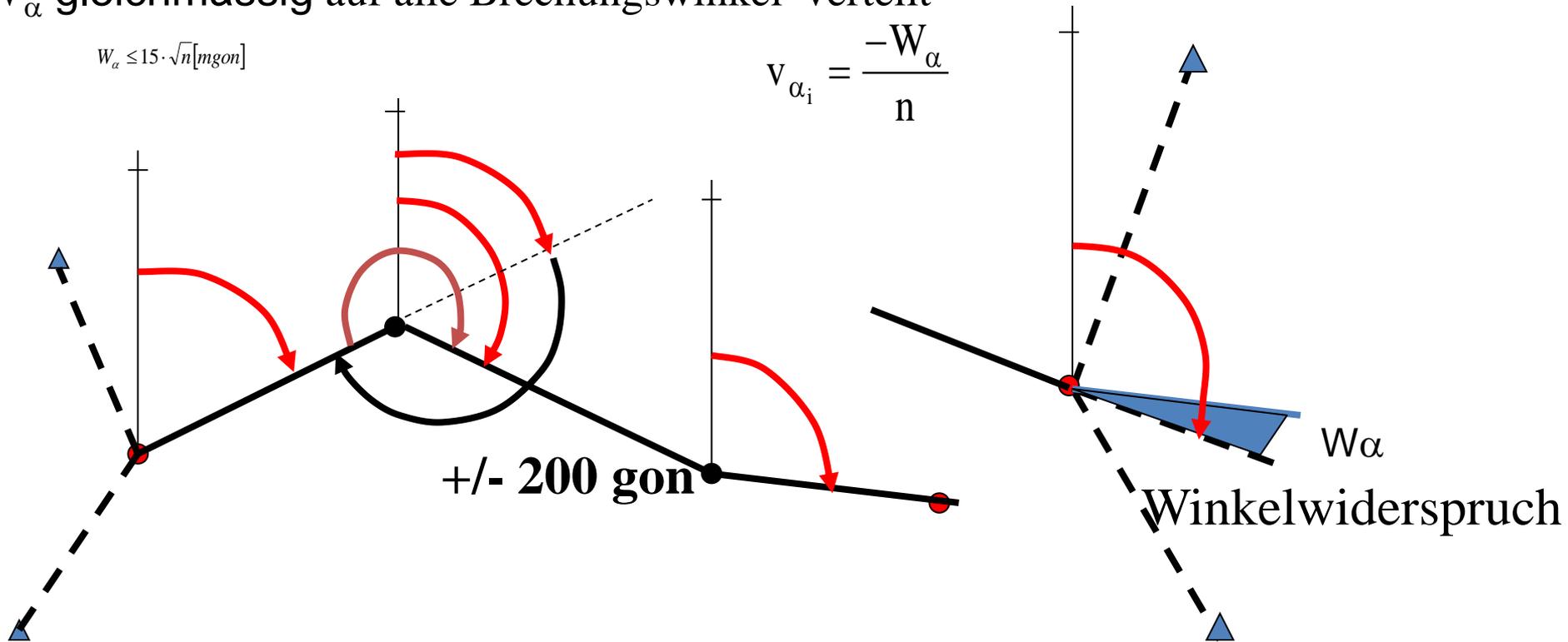
1. Schritt: Aufteilung des Winkelwiderspruchs (klassisch)

$$Az(A,1) + \sum_{i=1}^n \alpha_i - n \cdot 200\text{gon} - W_\alpha = Az(E, n) + 200\text{gon}$$
$$W_\alpha = \left(Az(A,1) + \sum_{i=1}^n \alpha_i - n \cdot 200\text{gon} \right) - (Az(E, n) + 200\text{gon})$$

W_α gleichmässig auf alle Brechungswinkel verteilt

$$W_\alpha \leq 15 \cdot \sqrt{n} [\text{mgon}]$$

$$v_{\alpha_i} = \frac{-W_\alpha}{n}$$

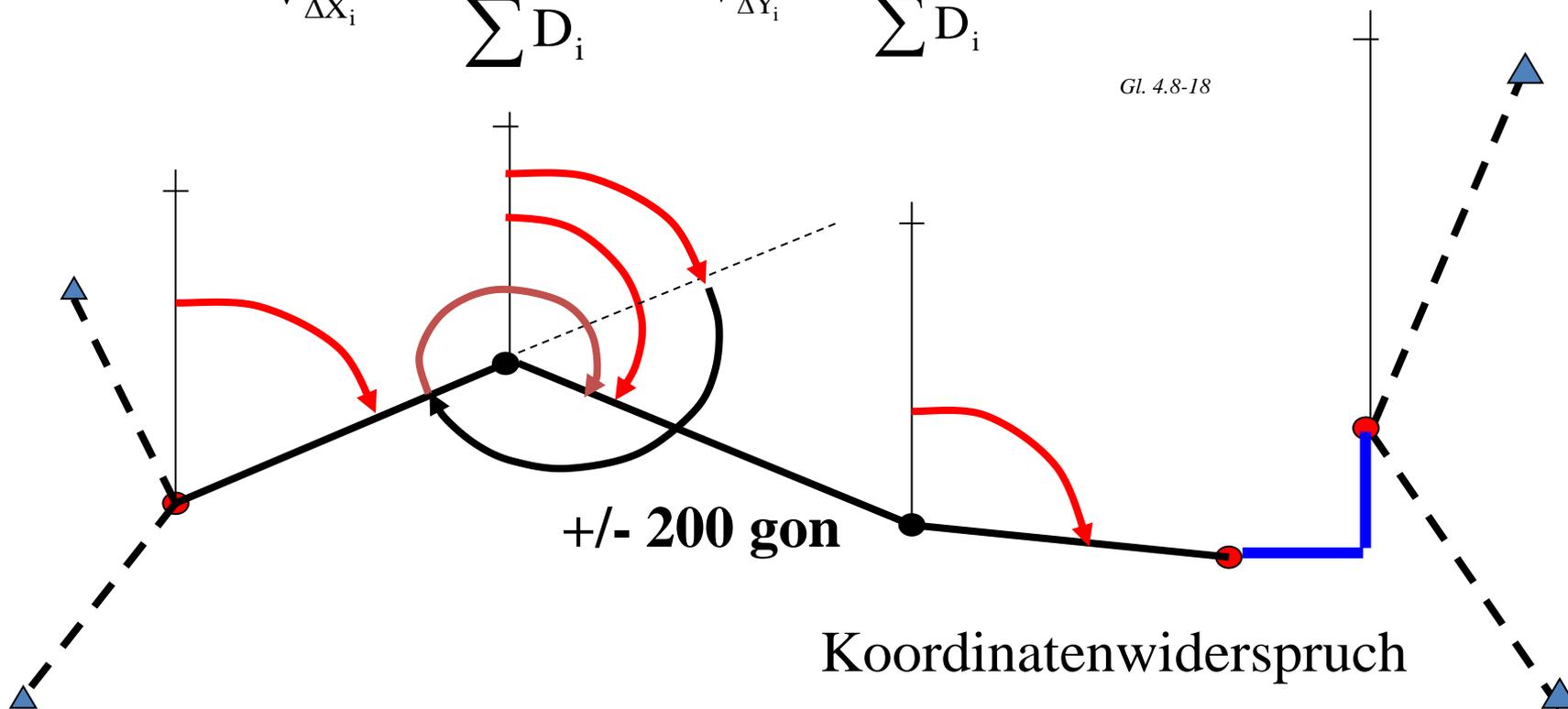


2. Schritt: Neuberechnung dann Aufteilung des Koordinatenwiderspruchs

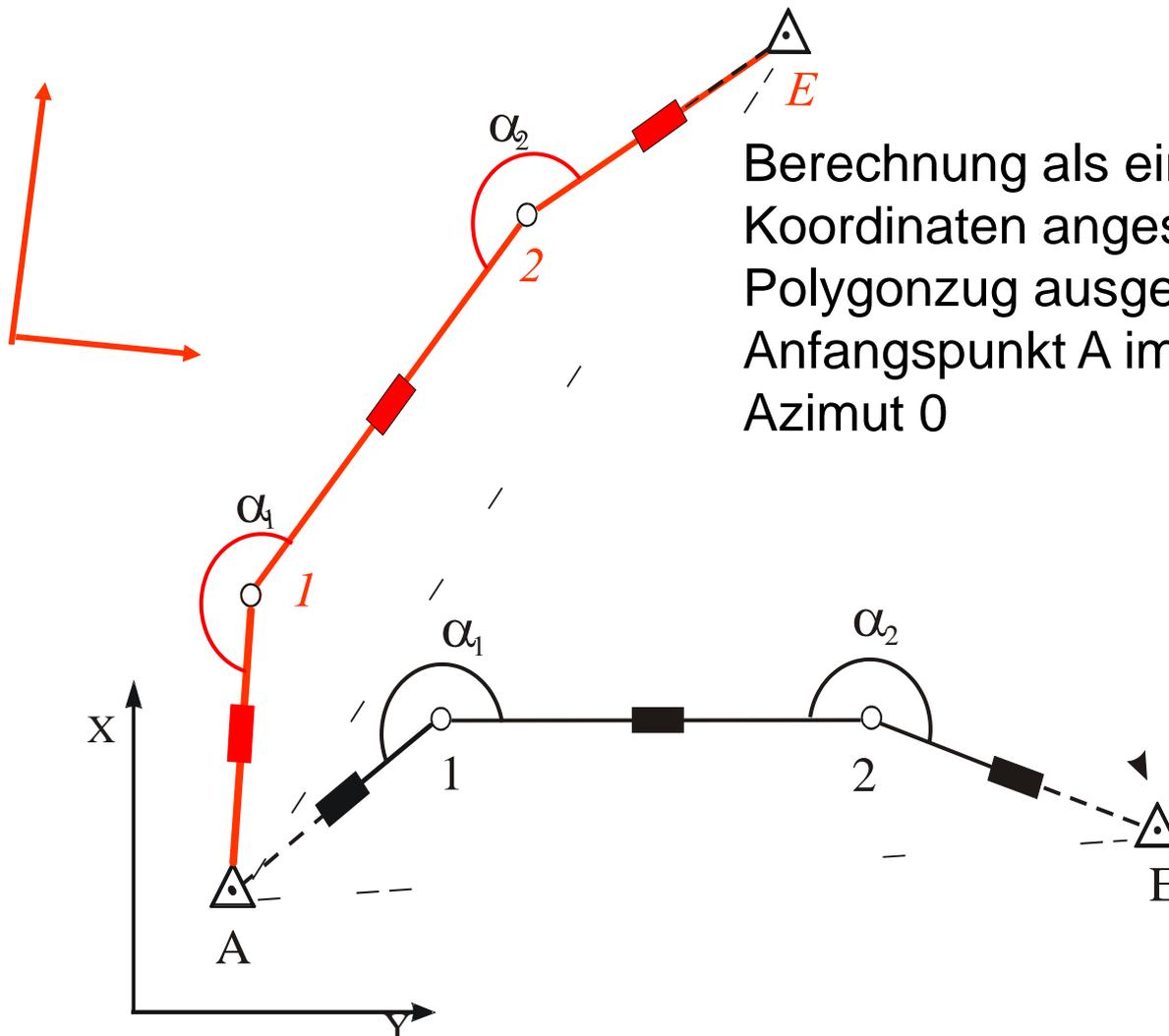
Liegen die Widersprüche innerhalb der vorgegebenen Toleranz, so werden die Widersprüche proportional zur Distanz auf die $\Delta Y_i, \Delta X_i$ verteilt.

$$v_{\Delta X_i} = \frac{-W_X \cdot D_i}{\sum D_i} \quad v_{\Delta Y_i} = \frac{-W_Y \cdot D_i}{\sum D_i}$$

Gl. 4.8-18

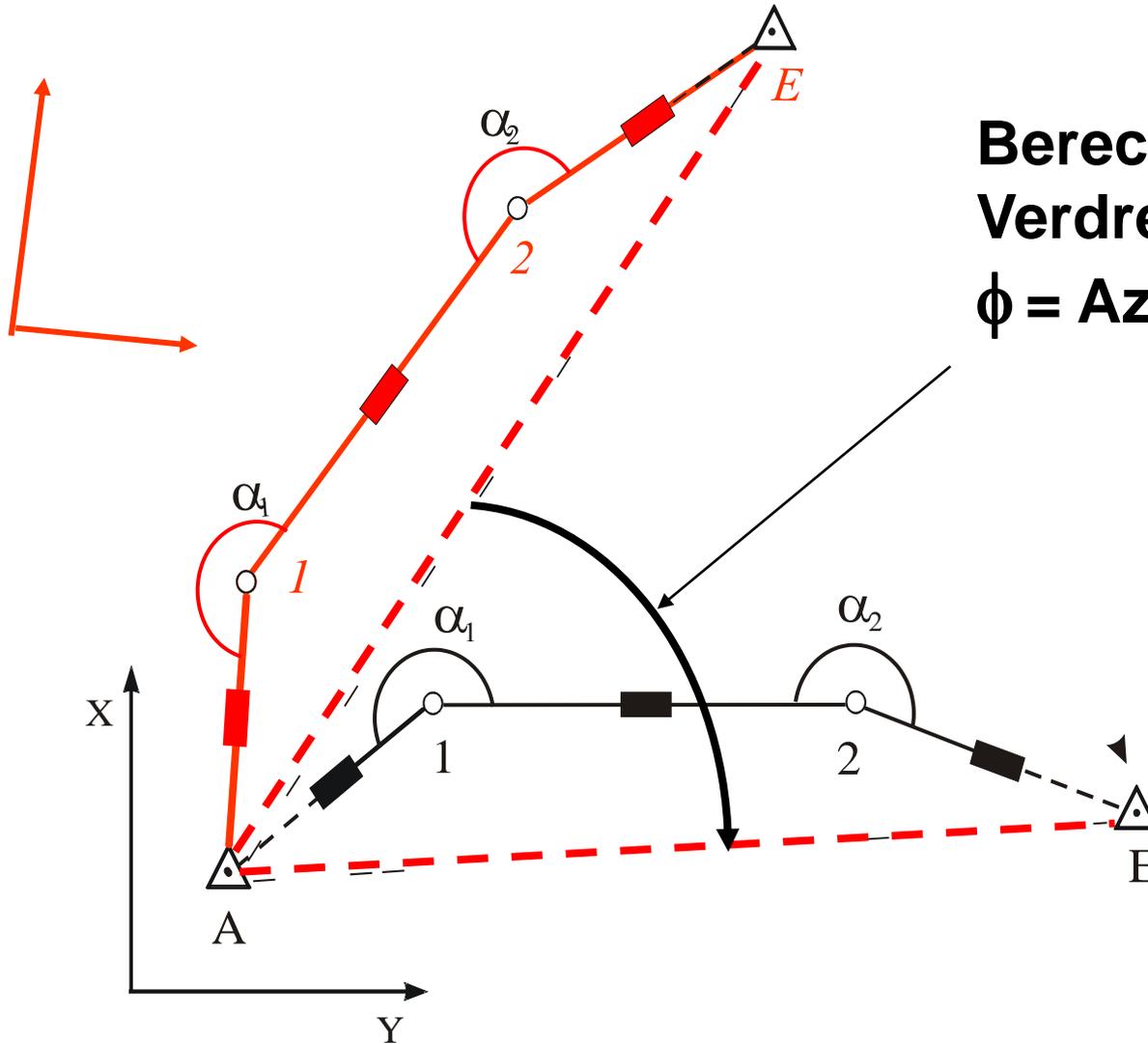


Polygonzugeinpassung durch Helmerttransformation



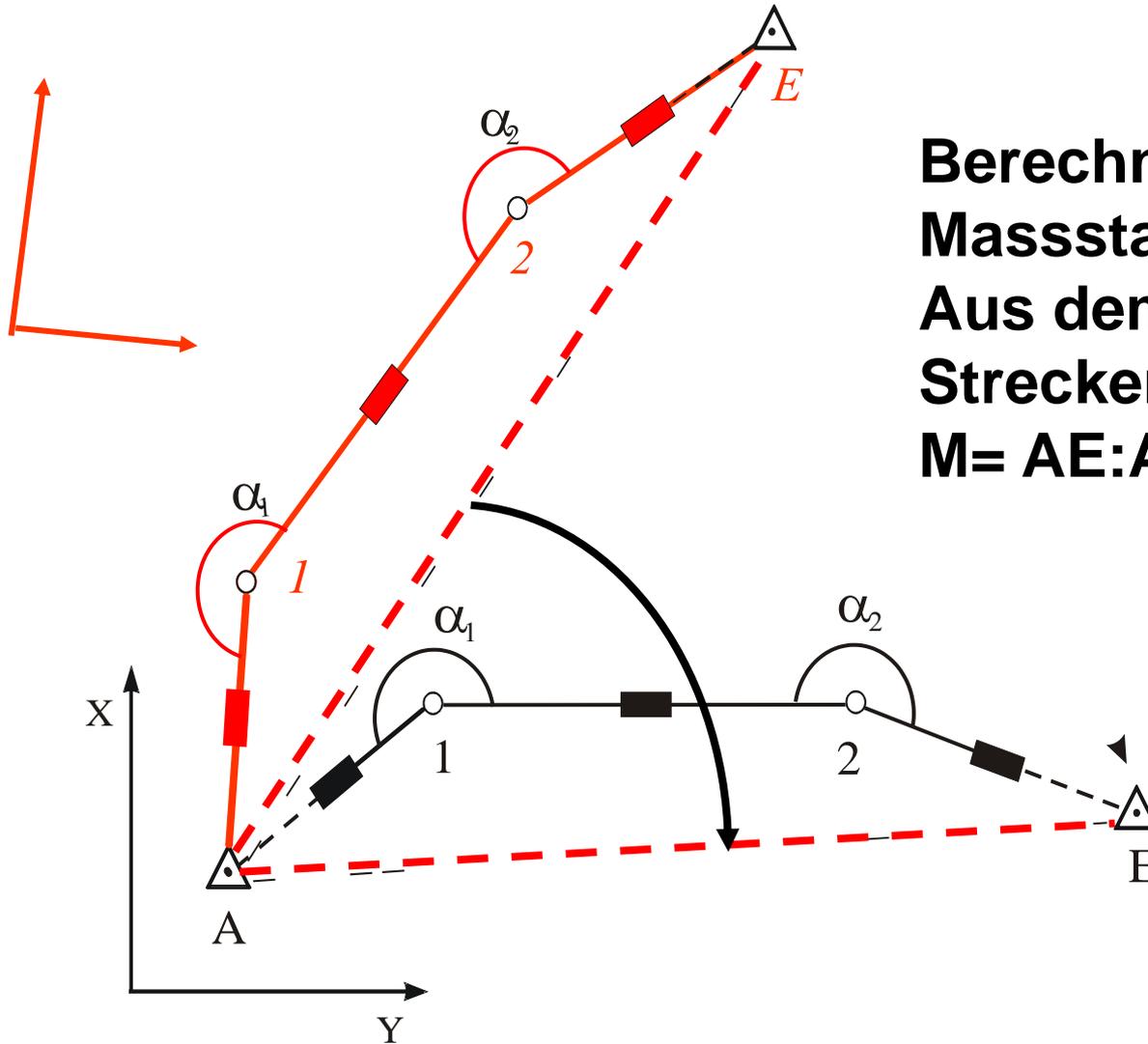
Berechnung als einseitig nach Koordinaten angeschlossener Polygonzug ausgehend vom Anfangspunkt A im **lokalen System** mit Azimut 0

Polygonzugeinpassung durch Helmertransformaion



**Berechnung des
Verdrehungswinkels ϕ**
 $\phi = Az(AE) - Az(AE)$

Polygonzugeinpassung durch Helmertransformaion

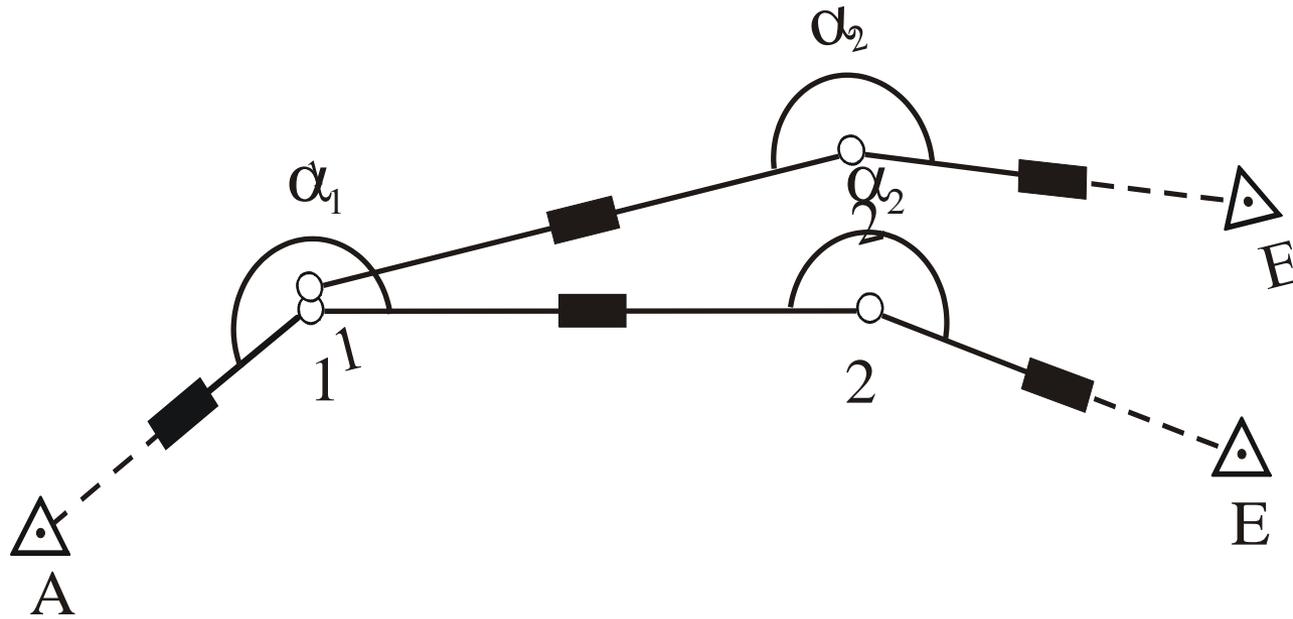


**Berechnung des
Massstabes
Aus dem
Streckenverhältnis
 $M = AE : A'E$**

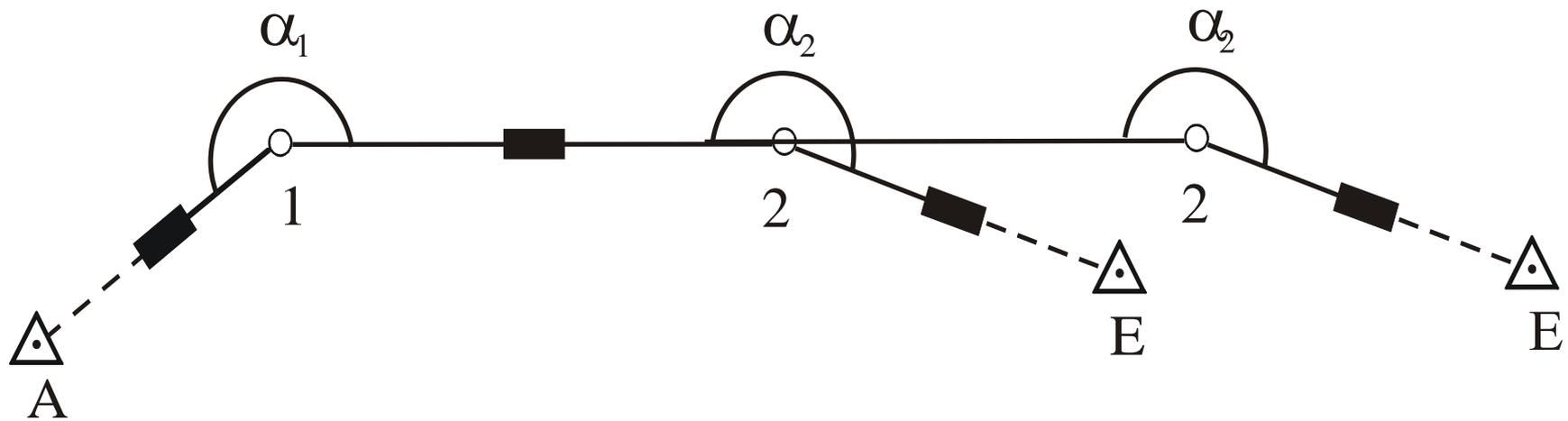
$$\begin{pmatrix} Y \\ X \end{pmatrix} = m \cdot \begin{bmatrix} \cos \varphi & \sin \varphi \\ -\sin \varphi & \cos \varphi \end{bmatrix} \cdot \begin{pmatrix} Y \\ X \end{pmatrix}$$

Anschliessend wird durch eine Drehstreckung, die Koordinaten des provisorischen Endpunktes E auf die definitiven Endpunktkoordinaten E eingepasst,

Grobe Fehler beim Polygonzug: Winkelfehler



Grobe Fehler beim Polygonzug: Streckenfehler



- Kartieren und Einpassen in Fixpunkte
- Polygonzug von A und von E aus berechnen und/oder kartieren