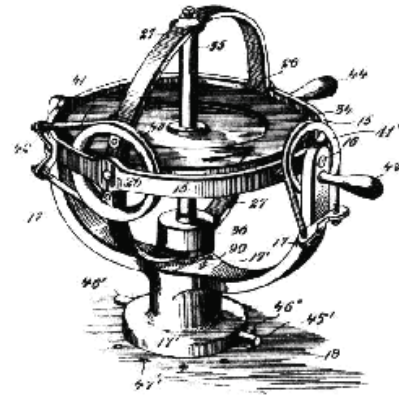


# Der nordweisende Kreisel



# Inhalt

- **Kreiselprinzip: mechanisch-physikalische Grundlagen**
- **Die Erde als Kreisel**
- **Kreiselarten**
  - Freier Kreisel / Inklinationskreisel / Deklinationskreisel
- **Der schweregefesselte Vermessungskreisel**
  - Definition / Aufbau / Prinzip
  - Der Wild GAK
  - Der GYROMAT – 2000
- **Beobachtung und Korrekturen**
  - Bandnulllage
  - Eichwert
  - Temperatureinflüsse
  - Breitengradabhängige Grössen
- **Reduktion der gemessenen Kreiselazimute**



## Varianzfortpflanzung beim Polygon- und Kreiselzug

- **Fehlerfortpflanzung beim gestreckten Polygonzug**

- **Längsfehler**

$$\sigma_l = \sigma_D \sqrt{\frac{L}{S}}$$

- **Querfehler**

$$\sigma_q = \frac{\sigma_\alpha}{\sqrt{3}} \sqrt{\frac{L^3}{S}}$$

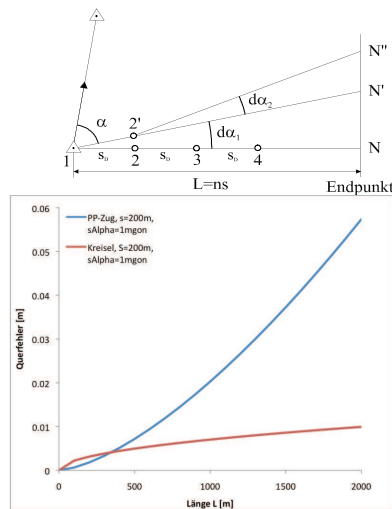
- **Fehlerfortpflanzung beim gestreckten Kreiselzug**

- **Längsfehler**

$$\sigma_l = \sigma_D \sqrt{\frac{L}{S}}$$

- **Querfehler**

$$\sigma_q = \sigma_\alpha \frac{L}{\sqrt{\frac{L}{S}}}$$



## Varianzfortpflanzung beim Polygon- und Kreiselzug

- **Wann soll ein Kreisel eingesetzt werden?**

- **Genauigkeit?**

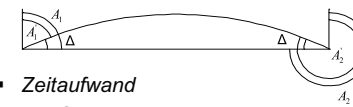
$$t = t_0 + \sum \beta_i - (n-1)200 \text{ gon}$$

$$\sigma_n^2 = \sigma_0^2 + n\sigma_\beta^2$$

$$\sigma_{\text{Kreisel}} \leq \sigma_n$$

$$n \geq \frac{\sigma_{\text{Kreisel}}^2 - \sigma_0^2}{\sigma_\beta^2}$$

- **Steigerung der Zuverlässigkeit**
- **Verminderung von Refraktionseinflüssen**



$$A_1 = A_1' + \Delta$$

$$A_2 = A_2' - \Delta$$

$$A = \frac{A_1 + A_2 - 200}{2}$$

$$A = \frac{A_1' + \Delta + A_2' - \Delta - 200}{2}$$

- **Zeitaufwand**

- **Satzmessung: ca. 5 Minuten**
- **Azutmessung: ca. 1 Stunde (ohne Referenzmessung)**



## Die fundamentalen Eigenschaften eines Kreisels

- 1. Inertia/Trägheit = Beharrungsvermögen
- 2. Präzession = Verschwenkung der Rotationsebene und Achse infolge einer äusseren Kraft



## Trägheitsmoment starrer Körper

Trägheitsmoment

$$\Theta = \sum (\Delta m \cdot r^2)$$

Summe aller Masseteilchen X Quadrat ihres Abstand von der Drehachse

$\Theta$  ist ein Mass für die Trägheit eines Körpers

$\Theta$  hängt von der Lage der Drehachse des Körpers ab

(Inertia/Trägheit = Beharrungsvermögen)



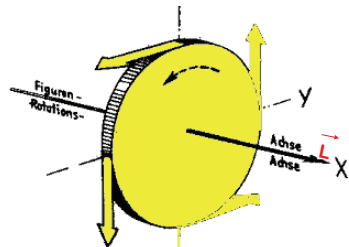
## Drehimpuls(Drall)

- Der Kiesel versucht infolge seiner schnell rotierenden Masseteilchen  $\Delta m$  in seiner Rotationsebene zu beharren

Drehimpuls(Drall)

$$\vec{L} = \Theta \cdot \vec{\omega}$$

Trägheitsmoment X Drehgeschwindigkeit



Durch die Rotation wird der Drehimpulsvektor  $L$  erzeugt, der von der Scheibe nach aussen gerichtet ist.

Der Drehimpuls ist eine vektorielle Grösse. Er hat die Richtung der Winkelgeschwindigkeit.

Eine Änderung des Drehimpulses kann bei konstantem Trägheitsmoment nur durch eine Winkelgeschwindigkeitsänderung (Drehzahländerung) erfolgen.

Der Drehimpuls (Betrag und Richtung) eines abgeschlossenen Systems ohne äussere Momente ist konstant (Drehimpulserhaltungssatz).



## Drehmoment

- Drehmoment = zeitliche Änderung eines Drehimpulses

$$\vec{D} = \frac{d\vec{L}}{dt} = \frac{d\Theta\vec{\omega}}{dt} = \sum_{i=1}^N r_i \times F_i^{\text{aussen}}$$

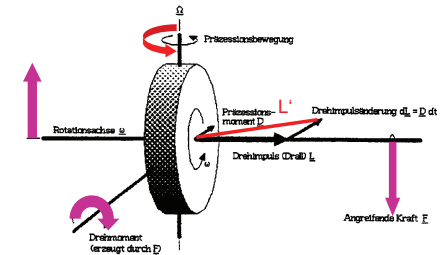


## Translation ↔ Rotation

Translationsbewegung	Verbindende Gleichung	Rotationsbewegung
Weg $\vec{s}$		Drehwinkel $\phi$
Geschwindigkeit $\vec{v} = \dot{\vec{s}}$	$\vec{v} = \omega \cdot \vec{r}$	Winkelgeschwindigkeit $\vec{\omega} = \dot{\phi}$
Beschleunigung $\vec{a} = \dot{\vec{v}}$	$\vec{a} = \dot{\omega} \cdot \vec{r}$	Winkelbeschleunigung $\vec{\alpha} = \dot{\omega}$
Masse $m = \int dm_i$		Trägheitsmoment $I = \int r_i^2 dm_i$
Kraft $\vec{F} = m\vec{a}$	$\vec{M} = \vec{r} \cdot \vec{F}$	Drehmoment $\vec{M} = I\vec{\alpha}$
Impuls $\vec{p} = m\vec{v}$	$\vec{L} = \vec{r} \cdot \vec{p}$	Drehimpuls (Drall) $\vec{L} = I\vec{\omega}$
Bewegungsenergie $E_{kin} = \frac{1}{2}mv^2$		Rotationsenergie $W_{rot} = \frac{1}{2}I\omega^2$

## Präzession

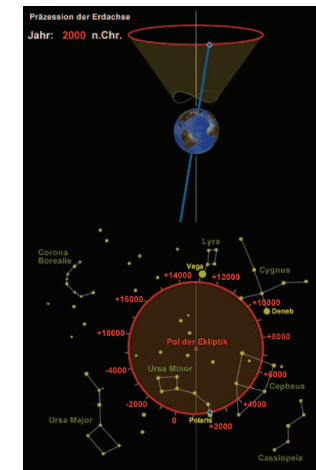
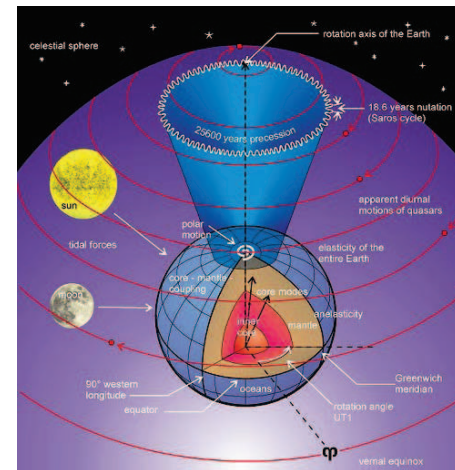
- Auf den Keisel wirkt das Kräftepaar  $F$  und  $-F$ , welches wieder nach der Rechtsschraubenregel das Drehmoment  $D^*$  erzeugt.  $D^*$  verursacht eine Drehimpulsänderung  $dL$ , die mit  $D^*$  gleichgerichtet ist.
- Aus dem ursprünglichen Drehimpuls  $L$  wird somit der Drehimpuls  $L'$ , dessen Betrag und Richtung vom alten etwas abweicht. Ist der Keisel frei beweglich, so wird er versuchen seinen Drehimpuls aufrechtzuerhalten. Das ist ohne Energieverlust nur möglich, indem er seine Drehachse dem neuen Drehimpuls  $L'$  ausrichtet.



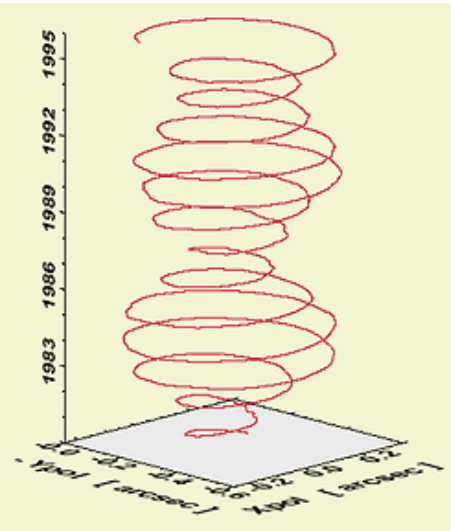
## Der Satz vom gleichsinnigen Parallelismus

- Der Läufer eines Kreisels verhält sich unter dem Einfluss eines äusseren Drehmomentes so, dass sich der Vektor des Drehimpulses ( $L$ ) auf dem kürzesten Weg sich gleichsinnig parallel zum Vektor des äusseren Drehmomentes zu stellen versucht (Fabeck)

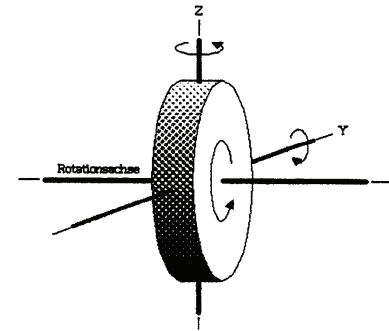
## Die Erde als Keisel



## Die Polbewegung



## Achskoordinatensystem und Kreiselarten

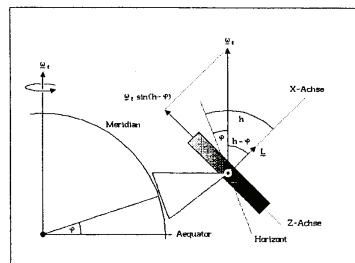


- Freier Kreisel
- Inklinationskreisel
- Deklinationskreisel

## Der Inklinationskreisel (Z-Achse gefesselt)

Steht die Y-Achse in Ost-West-Richtung und bildet die Läuferachse der Horizontalen einen Winkel  $h$  (Höhenwinkel), so entsteht ein Moment, mit dem der Kreisel in Richtung des Polarsterns schwenkt.

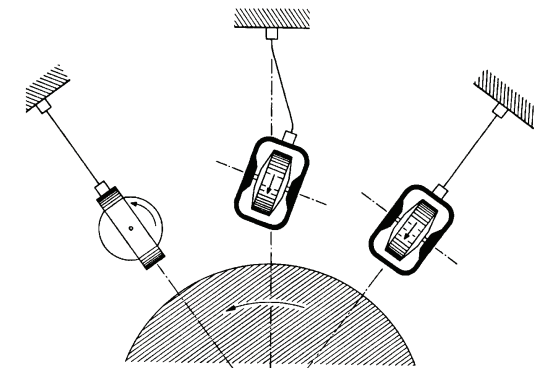
$$D^{\text{ausser}} = \omega_E \cdot L \cdot \sin(h - \varphi)$$



Prinzip des Inklinationskreisels

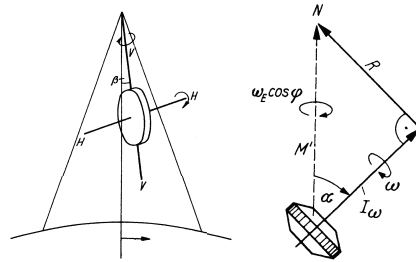
## Der Vermessungskreisel – Definition

- Als Pendel aufgehängter und von aussen angetriebener Kreisel, dessen Figurenachse unter dem Einfluss der Schwerkraft und der Erddrehung zur momentanen Rotationsachse der Erde (fast geographisch Nord) zeigt



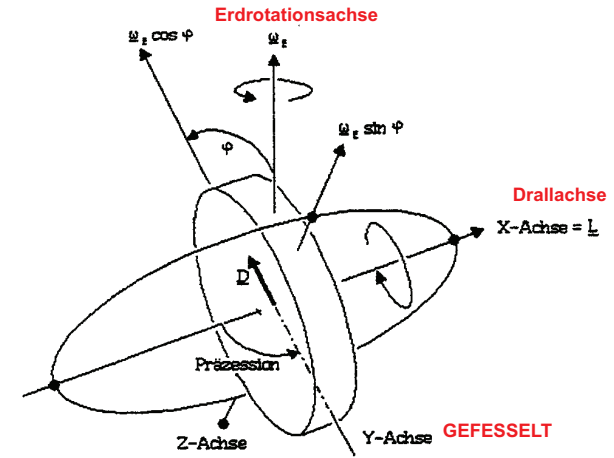
## Der Vermessungskreisel – Funktionsweise

- **Kreisel mit 2 Freiheitsgraden**
  - keine oder eingeschränkte Drehung um horizontale Achse (realisiert durch Schwerkraft, Fesselung an die Horizontalebene)
  - Drehung um Kreiselachse HH und Vertikalachse VV möglich
- Infolge Trägheit versucht rotierender Kreisel seine Lage zu behalten.
- Erdrotation bewirkt Abweichen des Kreiselschwerpunktes von der Lotlinie des Aufhängepunktes.
- Der Kreisel beginnt um die Lotrichtung zu drehen (Präzession).
- Kreiselachse schwingt sich in die geographische Nordrichtung ein.



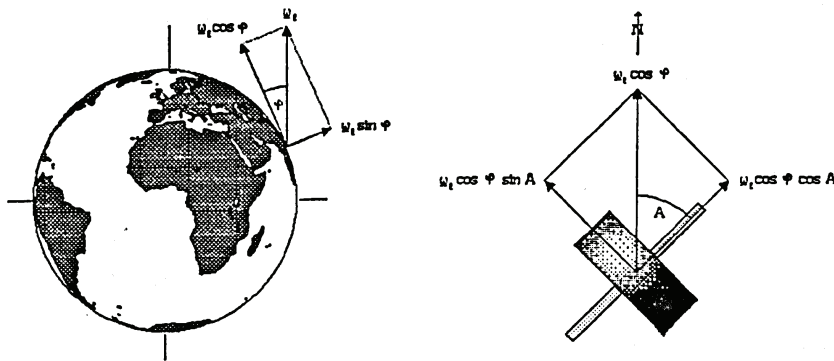
Wirkungsprinzip Kreisel mit zwei Freiheitsgraden und Richtkraft-Diagramm.  
Quelle: Instrumentenkunde Deumlich/Staiger

## Der Deklinations- oder Meridiankreisel

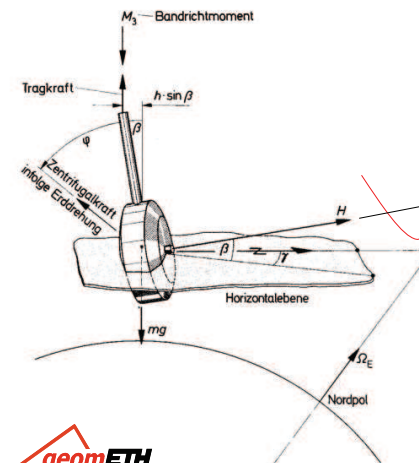


## Nordungsmoment

$$D = \omega_E \cdot L_K \cdot \cos \varphi \cdot \sin A$$



## Der bandgehängte Meridiankreisel

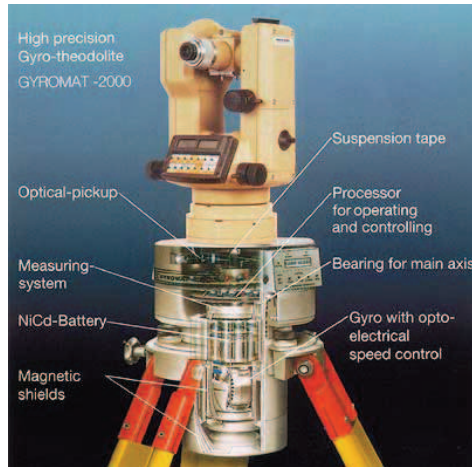


**Bewegungsmöglichkeit eines bandgehängten Meridiankreises:** Die Neigung des Mastes wird durch den Winkel  $\beta$  angegeben, das Azimut der Laufachse durch den Winkel  $\gamma$ . Äussere Kräfte und Drehmomente: Zu erkennen sind das Torsionsmoment des Tragebandes, die Haltekraft des Tragebandes, die gemeinsam mit der Schwerkraft ein Drehmoment ausübt und die Zentrifugalkraft infolge Erdrotation. Diese steht senkrecht zum rechts unten angedeuteten Erddrehvektor  $\Omega_E$ .





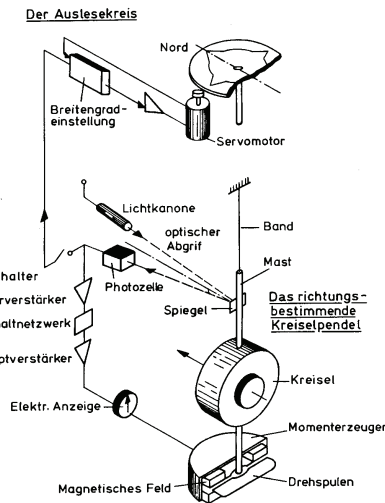
## Der Gyromat der DMT



Geodätische Messtechnik - Prof. Dr. H. Ingensand

ETH Zürich

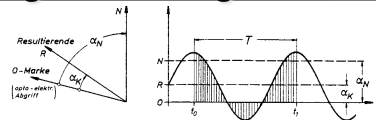
## Servokreis



Geodätische Messtechnik - Prof. Dr. H. Ingensand

ETH Zürich

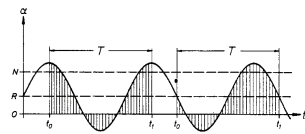
## Gyromat: Integral als Stellgröße



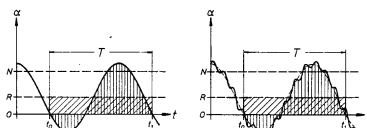
Aus Gleichgewichtsbedingung folgt:

$$\alpha_N \cdot D_B = (\alpha_N - \alpha_K) D_K$$

$$\alpha_N = \alpha_K (1 + \alpha) \quad \text{mit } \alpha = \frac{D_B}{D_K}$$



Meßzeit unabhängig vom Integrationsbeginn  $t_0$



Keine Veränderung des Flächeninhalts durch überlagerte Schwingungen

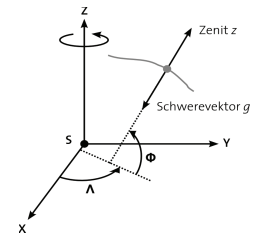


Geodätische Messtechnik - Prof. Dr. H. Ingensand

ETH Zürich

## Einflussfaktoren auf die Kreismessung

- **Erdrotation und lokale Lotrichtung haben Einfluss auf die Kreismessungen**  
-> Gleichsetzung mit astronomischen Azimuten
- **Messung findet im astronomischen, krummlinigen Koordinatensystem statt**
  - Erdschwerpunkt S
  - Astronomischer Meridian von Greenwich X
  - mittlere Rotationsachse Z (CIO-Pol)
  - senkrechte zur (X, Z)-Ebene in Ostrichtung Y
- **Daraus folgende Reduktionen**
  - Polhöschwankung (momentane Rotationsachse -> erdfester CIO-Pol)
  - Lotabweichung (astronomisches Azimut -> ellipsoidisches Azimut)
  - Meridiankonvergenz (ellipsoidisches Azimut -> ebenes Azimut)
  - Richtungsreduktion (Grosskreis -> Gerade)



Geodätische Messtechnik - Prof. Dr. H. Ingensand

ETH Zürich

## Absolute und relative Azimutbestimmung

### ▪ Absolute Azimutbestimmung

Berücksichtigung von:

- Polbewegung
- Lotabweichung
- Höhenreduktion
- Meridiankonvergenz
- Richtungsreduktion

### ▪ Relative Azimutbestimmung

Übertragung des Azimutes einer Referenzseite auf eine neue Seite.

Die Berücksichtigung von Einflüssen erfolgt je nach örtlichen Verhältnissen.

In der Regel werden die folgenden Einflüsse korrigiert:

- Lotabweichung
- Meridiankonvergenz
- Richtungsreduktion.



## Äussere und innere genauigkeitsbestimmende Faktoren

Äussere Faktoren	Innere, instrumentelle Faktoren
Netzgenauigkeit	Genauigkeit des Theodoliten und damit der Richtungsmessung
Kenntnis der Lotabweichung (Ost-Westkomponente)	Genauigkeit des Kreisels
Meridiankonvergenz	Zeitliche Stabilität der Referenzmessung
Richtungsreduktion	Temperaturkorrektur
Refraktion	Zentrierung



## Einflüsse Kreiselmessungen

### ▪ Lotabweichungen (Laplace'sche Orientierungsgleichungen)

$$A = \alpha - \eta \cdot \tan \varphi - (\xi \cdot \sin \alpha - \eta \cdot \cos \alpha) \cot z$$

$\xi$ : Nord-Süd Komponente der Lotabweichung

$\eta$ : Ost-West Komponente der Lotabweichung

### ▪ Meridiankonvergenz

$$T = A - \lambda$$

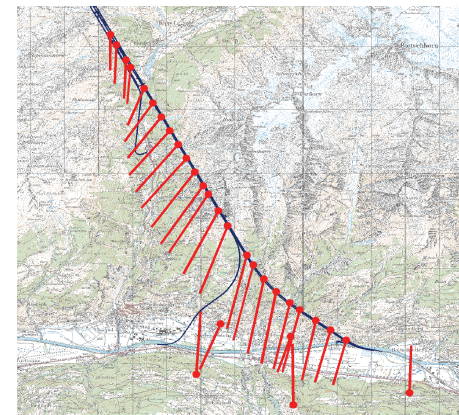
### ▪ Richtungsreduktion

$$t = T + \frac{\rho^{\text{gon}}}{6R^2} (y_z - y_s) (x_z + 2x_s)$$

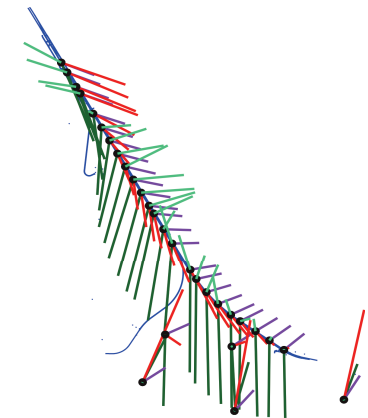


## Lotabweichung, Differenz Referenz- und Messstrecke

### ▪ Problematik Lotabweichungen



Lotabweichungen aus CHGeo04



- CHGeo04 Tunnel-EGM96 Tunnel
- CHGeo04 Tunnel-Topo25 Tunnel
- CHGeo04 Tunnel-Topo10'000 Tunnel
- CHGeo04 Tunnel-CHGeo04 Topo

25 cc





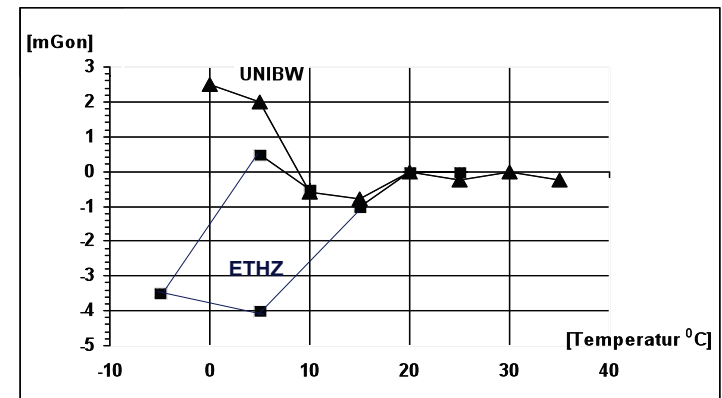
## Instrumentelle Abweichungen

- Eichwertstabilität
- Temperaturabweichungen
- Theodoliteinflüsse
- Vibrationen



## Temperatureinfluss

Stichwort Hysterese (Pfadabhängigkeit)



## Kreiseltheodolit – Anwendungen



Links und rechts: Kreiselmessungen bei Faudo im Gotthardbasistunnel.  
Quelle: Stephan Schütz

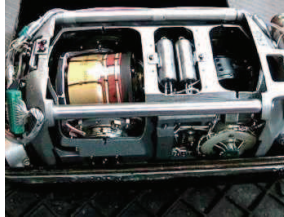
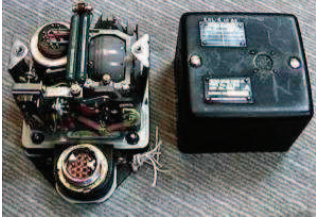


## Laserkreisel

- Ring Laser Gyroscope (RLG)
- Fiber Optic Gyroscope (FOG)
- **Prinzip: Sagnac-Effekt**
  - Ring mit im Uhrzeigersinn und Gegenuhzeigersinn laufenden Laserstrahlen (Ringlaser)
  - Unterschiedliche Laufzeiten der Strahlen bei rotierendem Ring
  - Änderung des Interferenzmusters hängt ab von Drehgeschwindigkeitsänderung des Ringlasers



## Navigationskreisel



Links:  
Flugzeugnavigationskreisel



Honeywell GG1320 ring laser gyro.  
Quelle: [www.honeywell.com](http://www.honeywell.com)



IMAR IMU (beinhaltet GG1320).  
Quelle: [www.imar-navigation.de](http://www.imar-navigation.de)



Kreiselkompass für Schiffe.  
Quelle: <http://www.raytheon-anschuetz.com>



Geodätische Messtechnik - Prof. Dr. H. Ingensand

ETH Zürich

## Fragen und Demonstration



Der Kreisel auf dem Weg zum nächsten Einsatz im Gotthardbasistunnel bei Faido.  
Quelle: Stephan Schütz



Geodätische Messtechnik - Prof. Dr. H. Ingensand

ETH Zürich